Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Productique

Année 2013-2014
$1^{ère}$ Année
Algèbre

Examen final

Exercice1 : (07 pts) Soit α un paramètre réel on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Pour quelles valeurs du paramètre α, la matrice A est-elle inversible ?
2. Lorsque cela est possible, calculer A^{-1} . (On rappelle que $A^{-1} = \frac{1}{det(A)}\ {}^{t}com(A)$)
3. En déduire la solution du système $\begin{cases} y+z=4 \\ 2x+2y=16 \\ 3x+3z=12 \end{cases}$

Exercice2 : (07 pts) Soit les deux applications suivantes

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \qquad \text{et} \qquad g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad x \mapsto g(x) = (x^2, -x^2)$$

1. f est-elle injective ? f est-elle surjective ?
2. g est-elle injective ? g est-elle surjective ?
3. Calculer $(f \circ g)(x)$.
4. $(f \circ g)$ est-elle injective ? $(f \circ g)$ est-elle surjective ?

Exercice3 : (06 pts) Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$ on a

$$M^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} & \frac{1-2^n}{2} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-2^n}{2} & \frac{2^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$$

Barème :
Exercice1 : 7 points = 1. 02pts ; 2. 02pts ; 3. 03pts .
Exercice2 : 7 points = 1. 02pts ; 2. 02pts ; 3. 01pt ; 4. 02pts .
Exercice3 : 6points .

~ Corrigé de l'Examen d'Algèbre ~

Exercice 1 :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\det A = -1 + \alpha(-\alpha^2) = -(1+\alpha^3)$.

$\det A = 0 \Rightarrow -(1+\alpha^3) = 0 \Rightarrow \alpha^3 = -1 \Rightarrow \alpha = -1$.

La matrice A est inversible ssi $\det A \neq 0$; donc A est inversible ssi $\alpha \neq -1$ (02pts).

2. On suppose que $\alpha \neq -1$. A^{-1} existe ; $\det A = -(1+\alpha^3) \neq 0$, on calcule les cofacteurs

$C_{11} = -1$, $C_{12} = \alpha$; $C_{13} = -\alpha^2$; $C_{21} = \alpha$; $C_{22} = -\alpha^2$; $C_{23} = -1$; $C_{31} = -\alpha^2$; $C_{32} = -1$, $C_{33} = \alpha$.

$Com(A) = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$; $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\, {}^t Com(A) \Rightarrow A^{-1} = \frac{-1}{(\alpha^3+1)} \begin{pmatrix} -1 & \alpha & -\alpha^2 \\ \alpha & -\alpha^2 & -1 \\ -\alpha^2 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ ... (02pts)

3. $\begin{cases} y+z=4 \\ 2x+2y=16 \\ 3x+3z=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+3z=12 \\ y+z=4 \\ 2x+2y=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z=4 \\ y+z=4 \\ x+y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A \text{ avec } \alpha=1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

pour $\alpha = 1$; $A^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et donc $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ainsi $x = 4$; $y = 4$; $z = 0$ ——— (03pts)

Exercice 2 :

1. $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x_1, x_2) \longmapsto f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$

- Il suffit de remarquer par exemple que pour $X_1 = (1,4)$, et $X_2 = (3,2)$; $f(X_1) = f(X_2) = 5$ mais $X_1 \neq X_2$; donc f n'est pas injective. ——— (01pt).
- Il suffit de remarquer que $\forall y \in \mathbb{R}$; $\exists X = (x_1, x_2) = (0, y) \in \mathbb{R}^2$; $y = f(0,y) = 0 + y = y$. donc f est surjective ——— (01pt)

2. $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$x \longmapsto g(x) = (x^2, -x^2)$

- Il suffit de remarquer, par exemple que pour $x_1 = 2$ et $x_2 = -2$; $g(x_1) = g(x_2) = (4, -4)$ mais $x_1 \neq x_2$ donc g n'est pas injective. ——— (01pt)
- Il suffit de remarquer, par exemple que pour $Y = (1,4) \in \mathbb{R}^2$; $Y = g(x)$ donne $(1,4) = (x^2, -x^2) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = x^2 \\ 4 = -x^2 \end{cases}$ ce qui est impossible donc g n'est pas surjective ——— (01pt)

3. $\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f\circ g"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$ On commence par observer que $f\circ g$ existe.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2, -x^2) = x^2 + (-x^2) = 0$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f\circ g)(x) = 0$. ——— $\underline{(1pt)}$

4. $f\circ g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto (f\circ g)(x) = 0$ n'est ni injective ni surjective

(On peut toujours donner des contre exemples $f(1) = f(13) = 0$ mais $1 \neq 13$
$y = 5 = f(x) = 0$ impossible) ——— $\underline{(02pts)}$

<u>EXERCICE 3</u>: Nous allons procéder par récurrence

pour $n = 2$, $M^2 = M.M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3/2 & 5/2 & -3/2 \\ 3/2 & -3/2 & 5/2 \end{pmatrix}$

Donc $M^2 = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^2+1}{2} & \frac{1-(-1)^2}{2} & \frac{1-(-1)^2}{2} \\ \frac{1-2^2}{2} & \frac{1+2^2}{2} & \frac{1-2^2}{2} \\ \frac{2^2-(-1)^2}{2} & \frac{(-1)^2-2^2}{2} & \frac{2^2+(-1)^2}{2} \end{pmatrix}$ la formule est vérifiée pour $n=2$. $\underline{(2pts)}$

On suppose que $M^n = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} & \frac{1-2^n}{2} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-2^n}{2} & \frac{2^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}$; et il faut montrer que

$M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^{n+1}+1}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ \frac{1-2^{n+1}}{2} & \frac{1+2^{n+1}}{2} & \frac{1-2^{n+1}}{2} \\ \frac{2^{n+1}-(-1)^{n+1}}{2} & \frac{(-1)^{n+1}-2^{n+1}}{2} & \frac{2^{n+1}+(-1)^{n+1}}{2} \end{pmatrix}$.

Pour cela on effectue le calcul $M^{n+1} = M^n . M$

$M^{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n+1}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} & \frac{1-(-1)^n}{2} \\ \frac{1-2^n}{2} & \frac{1+2^n}{2} & \frac{1-2^n}{2} \\ \frac{2^n-(-1)^n}{2} & \frac{(-1)^n-2^n}{2} & \frac{2^n+(-1)^n}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1/2 & 3/2 & -1/2 \\ 3/2 & -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

Après Calcul on retrouve la formule recherchée (04pts)