Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2014-2015
1ère Année
Outils Mathématiques

Examen final

Exercice 1 : (06points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

$$y' + 9y = x$$

$$y'' + 9y = 0$$

Exercice 2 : (07 points)

Calculer ce qui suit :

$$I_1 = \int \frac{-3x+1}{x^2+x+5} dx \quad ; \qquad I_2 = \int (x^2+1) arctgx dx \quad ; \qquad I_3 = \int \frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$$

Exercice 3 : (07 points)

Soit n un entier naturel tel que n>3.

1. Trouver les racines nièmes de $z = 1$.
2. Soit $\alpha \neq 1$ une racine nième de $z = 1$, calculer

$$S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \cdots + n\alpha^{n-1}$$

Barème :

Exercice 1 : 6 points ; question1= 4 points, question2= 2 points.

Exercice 2 : 7 points ; I1= 2 points, I2= 2 points, I3=3 points

Exercice 3 : 7 points ; question1= 1point, question2=6 points.

Outils Mathématiques

— Corrigé —

Exercice 1 :

1- Pour résoudre l'équation : $y' + 9y = x$ (Eq. linéaire du 1er ordre)

il suffit de multiplier les deux membres de l'équation par $e^{9x} \longrightarrow$ 01pt

$$y' + 9y = x \iff y'e^{9x} + 9e^{9x} \cdot y = xe^{9x}$$

$$\iff (ye^{9x})' = xe^{9x} \quad \text{soit} \quad ye^{9x} = \int xe^{9x}\,dx.$$

une intégration par partie permet de calculer $\int xe^{9x}\,dx$ $\left\{\begin{array}{l} f = x \rightarrow f' = 1 \\ g' = e^{9x} \rightarrow g = \frac{1}{9}e^{9x} \end{array}\right\}$ 01pt

ce qui donne : $ye^{9x} = \frac{x}{9}e^{9x} - \frac{1}{9}\int e^{9x}\,dx = \frac{x}{9}e^{9x} - \frac{1}{81}e^{9x} + C$ $(C \in \mathbb{R})$

et par suite $\boxed{y = \frac{x}{9} - \frac{1}{81} + Ce^{-9x} \quad C \in \mathbb{R}} \longrightarrow$ 02pts

2- Pour résoudre l'ESSM $y'' + 9y = 0$, on considère l'équation caractéristique

$$r^2 + 9 = 0 \Rightarrow r^2 = -9 = i^2 9, \Rightarrow r_1 = 3i \text{ et } r_2 = -3i \longrightarrow \text{01pt}$$

la solution générale de l'ESSM est donnée par

$$\boxed{y = y_0 = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) \qquad C_1 \in \mathbb{R} \text{ et } C_2 \in \mathbb{R}} \rightarrow \text{01pt}$$

Exercice 2 :

- $I_1 = \int \frac{-3x+1}{\underbrace{x^2+x+5}_{\Delta<0}}\,dx = \int \frac{-\frac{3}{2}(2x+1) + \frac{5}{2}}{x^2+x+5}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2+x+5}\,dx$

$$I_1 = -\frac{3}{2}\ln(x^2+x+5) + \frac{5}{2}J \longrightarrow \text{00,5pt}$$

$$J = \int \frac{1}{x^2+x+5}\,dx$$

$$x^2+x+5 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + 5 - \frac{1}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$$

$$J=\int\frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{19}{4}}dx=\frac{4}{19}\int\frac{1}{\frac{4}{19}(x+\frac{1}{2})^2+1}dx=\frac{4}{19}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)^2+1}dx$$

On pose $t=\frac{2x+1}{\sqrt{19}} \Rightarrow dt=\frac{2}{\sqrt{19}}dx \Rightarrow dx=\frac{\sqrt{19}}{2}dt$.

$$J=\frac{2}{\sqrt{19}}\int\frac{1}{t^2+1}dt=\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}t=\frac{2}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)\longrightarrow 01pt$$

$$\boxed{I_1=-\frac{3}{2}\ln(x^2+x+5)+\frac{5}{\sqrt{19}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{19}}\right)+C \quad C\in\mathbb{R}}\longrightarrow 00,5pt$$

• $I_2=\int(x^2+1)\operatorname{arctg}x\,dx \longrightarrow$ par parties $\begin{cases} f=\operatorname{arctg}x \longrightarrow f'=\frac{1}{1+x^2} \\ g'=(x^2+1)\longrightarrow g=\frac{1}{3}x^3+x. \end{cases} \longrightarrow 00,5pt$

$$I_2=(\tfrac{1}{3}x^3+x)\operatorname{arctg}x-\int\frac{\frac{1}{3}x^3+x}{1+x^2}dx.$$

il faut observer que $\frac{\frac{1}{3}x^3+x}{1+x^2}=\frac{1}{3}\,\frac{x^3+3x}{1+x^2}=\frac{1}{3}\,\frac{x^3+x+2x}{1+x^2}=\frac{1}{3}\left(x+\frac{2x}{1+x^2}\right)$
(ou faire une division euclidienne)

$$\boxed{I_2=(\tfrac{1}{3}x^3+x)\operatorname{arctg}x-\frac{1}{3}\,\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}\ln(1+x^2)+C \quad C\in\mathbb{R}}\longrightarrow 01,5pt$$

• $I_3=\int\frac{1}{1-x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$ (on supposera que l'expression à intégrer est bien définie) $x\in]-1,1[$

On pose : $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \Rightarrow x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \Rightarrow dx=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt \longrightarrow 01pt$

En remarquant que $\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\frac{1+t^2}{2t^2}$

$$I_3=\int\frac{1+t^2}{2t^2}\cdot t\cdot\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt=-2\int\frac{1}{1+t^2}dt=-2\operatorname{arctg}t+C \quad C\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{I_3=-2\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)+C \quad C\in\mathbb{R}}\longrightarrow 02pts$$

EXERCICE 3 :

1- les racines $n$ièmes de l'unité $\alpha^n = 1$.

$\alpha = \rho e^{i\varphi}$, $(\rho e^{i\varphi})^n = 1e^{i0} \Rightarrow \begin{cases} \rho^n = 1 \Rightarrow \rho = 1. \\ n\varphi = 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$.

$\rho = 1$ et $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$ $k = 0, 1, \dots, (n-1)$.

$\alpha_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les racines $n$ièmes de l'unité. $k = 0, 1, 2, \dots (n-1)$.

01pt (Vu en cours et TD)

2- α est une racine $n$ième de 1 avec $\alpha \neq 1$.

Pour calculer $S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots + n\alpha^{n-1}$.

Considérons la fonction $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n$.

Donc $f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

D'un autre côté, pour $x \neq 1$ on a

$f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, utilisons cette formule pour calculer $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

Soit $\alpha \neq 1$, alors $S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots + n\alpha^{n-1} = f'(\alpha)$.

et donc $S = \frac{-(n+1)\alpha^n(1-\alpha) + (1 - \alpha^{n+1})}{(1-\alpha)^2}$

Or $\alpha^n = 1$ (racine nème de l'unité) $\alpha^{n+1} = \alpha^n . \alpha = \alpha$

$$S = \frac{-(n+1)(1-\alpha) + (1-\alpha)}{(1-\alpha)^2} = \frac{-n}{1-\alpha} = \frac{n}{\alpha - 1}$$

ainsi $\boxed{S = 1 + 2\alpha + 3\alpha^2 + \dots + n\alpha^{n-1} = \frac{n}{\alpha - 1}} \longrightarrow$ 06pts

(Remarque : cette formule est valable si $\alpha^n = 1$ et $\alpha \neq 1$)