Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2023-2024
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

Exercice 1 : (08 pts)

Une machine produit des articles dont 3% sont défectueux.

I. Calculer la probabilité que parmi 112 articles produits il y ait :

1. Deux articles défectueux.
2. Cinq articles défectueux.

II. Calculer les probabilités demandées plus haut, en utilisant une approximation par une loi de Poisson. Cette approximation est-elle justifiée ?

Exercice 2 : (12 pts)

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 160 centimètres, et d'écart-type 5 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit supérieure à 170 centimètres.
2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.
3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 160 centimètres, et d'écart-type 5 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille soit supérieure à 170 cm.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

— Corrigé —

— Sujet 1 —

Exercice 1 :

I. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'article défectueux parmi 112 ; la probabilité qu'un article soit défectueux est $p = 3\% = 0{,}03$.

X suit une loi binomiale $B(112, 0{,}03)$ $n = 112$, $p = 0{,}03$

$$P(X=k) = C_{112}^{k} (0{,}03)^k (0{,}97)^{112-k}$$

1. $P(X=2) = C_{112}^{2} (0{,}03)^2 (0{,}97)^{110} = \dfrac{112!}{2!\,(110)!} (0{,}0009)(0{,}035) = \dfrac{111 \times 112}{2} \times 0{,}0000315$

$= 0{,}1958$. 0.2pts

2. $P(X=5) = C_{112}^{5} (0{,}03)^5 (0{,}97)^{107} = 0{,}125$. 0.2pts

II Faisons une approximation par une loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{avec} \quad \lambda = n \cdot p = 112 \times 0{,}03 = 3{,}36.$$

$P(X=2) = \dfrac{(3{,}36)^2}{2!} e^{-3{,}36} = 0{,}196$ 0.1pt

$P(X=5) = \dfrac{(3{,}36)^5}{5!} e^{-3{,}36} = 0{,}124$ 0.1pt

Cette approximation est justifiée car $p = 0{,}03 < 0{,}1$ (petit) et $n = 112 \geq 50$. 0.2pts

(On remarque par ailleurs que les résultats obtenus par approximation sont très proches des résultats exacts ce qui confirme que l'approximation est justifiée).

Exercice 2 : I. $X \leadsto N(160, 5)$

1. $P(X>170) = 1 - P(X \leq 170) = 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{170-160}{5}\right)$

$= 1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq 2\right) = 1 - 0,9772 \longrightarrow$ (table de $N(0,1)$)

$= 0,022.$ 01pt

2. $P(150 \leq X \leq 157) = P\left(\frac{150-160}{5} \leq \frac{X-160}{5} \leq \frac{157-160}{5}\right)$

$= P\left(-2 \leq \frac{X-160}{5} \leq -0,6\right)$

$= F(-0,6) - F(-2)$ (F . fdr de $N(0,1)$)

$= F(2) - F(0,6)$ $\left(\begin{array}{l} F(-2) = 1 - F(2) \\ F(-0,6) = 1 - F(0,6) \end{array}\right)$

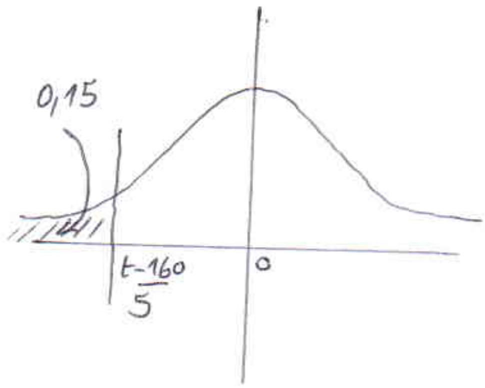
$= 0,9772 - 0,7257 \longleftarrow$ (table $N(0,1)$).

$= 0,2515.$ 02pts

3. On cherche la taille t telle que $P(X \leq t) = 15\% = 0,15$

Donc $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{t-160}{5}\right) = 0,15$

Comme $0,15 < 0,5$, $\frac{t-160}{5}$ est nécessairement négatif



Donc $\left[1 - P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-t}{5}\right) = 0,15\right]$

par suite : $P\left(\frac{X-160}{5} \leq \frac{160-t}{5}\right) = 1 - 0,15 = 0,85$

Une lecture inversée de la table de $N(0,1)$ nous donne :

$\frac{160-t}{5} = 1,04 \Rightarrow t = 160 - 1,04 \times 5$

$\Rightarrow t = 154,8 \Rightarrow t \simeq 155$ cm. 03pts

Donc les 15% des femmes les plus petites ont une taille maximale de 155 cm

II. $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(160, 5)$, $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(174, 8)$

On note les événements

A : La taille de la personne est supérieure à 170 cm

F : La personne est une femme

H : La personne est un homme

Système Complet d'événements
$H \cup F =$ toute la population
$H \cap F = \emptyset$.

01pt

1. On cherche $P(A)$.

$$P(A) = P(A/F).P(F) + P(A/H).P(H) \quad \text{(probabilités totales)}.$$

$$= P(X>170) \times 0{,}513 + P(Y>170).\ 0{,}487$$

$P(X>170) = 0{,}022$ (D'après la première question I. 1.)

$$P(Y>170) = 1 - P(Y \leq 170) = 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq \frac{170-174}{8}\right)$$

$$= 1 - P\left(\frac{Y-174}{8} \leq -0{,}5\right)$$

$$= P\left(\frac{Y-174}{8} \leq 0{,}5\right)$$

$$= 0{,}6915 \longleftarrow \text{de la table de } \mathcal{N}(0,1)$$

01pt

$$P(A) = 0{,}022 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487$$

$$P(A) = 0{,}3480.$$

02pts

2. On cherche $P(F/A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/F).P(F)}{P(A/F).P(F) + P(A/H).P(H)}$

[Probabilité Conditionnelle ou Formule de Bayes]

$$= \frac{0{,}022 \times 0{,}513}{0{,}3480}$$

$$= \frac{0{,}0113}{0{,}348} = 0{,}032.$$

$$P(F/A) = 0{,}032$$

02pts

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2023-2024
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

Exercice 1 : (08 pts)

Une machine produit des articles dont 3% sont défectueux.

I. Calculer la probabilité que parmi 122 articles produits il y ait :

1. Deux articles défectueux.
2. Cinq articles défectueux.

II. Calculer les probabilités demandées plus haut, en utilisant une approximation par une loi de Poisson. Cette approximation est-elle justifiée ?

Exercice 2 : (12 pts)

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 165 centimètres, et d'écart-type 6 centimètres.

1. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit supérieure à 170 centimètres.
2. On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.
3. Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 165 centimètres, et d'écart-type 6 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille soit supérieure à 170 cm.
2. Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?

— Corrigé —
- Sujet 2 -

Exercice 1 Ici X suit une loi $B(122,\ 0{,}03)$

I. $P(X=2) = 0{,}1717$ 02pts , $P(X=5) = 0{,}1427$ 02pts

II. Approximation par une loi de Poisson $P(\lambda) : \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = P(X=k)$

$\lambda = n.p = 122 \times 0{,}03 = 3{,}66$.

$P(X=2) = \frac{(3{,}66)^2}{2!} e^{-3{,}66} = 0{,}1723$ 01pt , $P(X=5) = \frac{(3{,}66)^5}{5!} e^{-3{,}66} = 0{,}1408$. 01pt

L'approximation est justifiée $p = 0{,}03 < 0{,}1$ et $n = 122 \geq 50$.
02pts

Exercice 2 : $X \rightsquigarrow N(165,\ 6)$

I. 1. $P(X > 170) = 1 - 0{,}7967 = 0{,}2$ 01pt

2. $P(150 \leq X \leq 157) = 0{,}9938 - 0{,}9082 = 0{,}0856$ 02pts

3. $P(X \leq t) = 15\% = 0{,}15$ (on cherche t)

on trouve $t = 158{,}76$ donc $t \approx 159$ cm 03pts

Donc les 15% des femmes les plus petites ont une taille maximale de 159 cm.

II. $X \rightsquigarrow N(165, 6)$, $Y \rightsquigarrow N(174,\ 8)$

On note : A : la taille de la personne dépasse 170 cm.
F : la personne est une femme
H : la personne est un homme.) Système complet d'événements 1pt

1. $P(A) = P(A/F).P(F) + P(A/H).P(H)$.
$= 0{,}2 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487 = 0{,}4394$. 02pts
01pt

2. $P(F/A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A/F).P(F)}{P(A/H)P(H) + P(A/F).P(F)}$ — Probabilité conditionnelle ou Formule de Bays

$= \frac{0{,}2 \times 0{,}513}{0{,}4394} = 0{,}2335$. 02pts

Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2023-2024
Master I
Probabilités-Statistiques

Contrôle

<u>Exercice 1</u> : (08 pts)

Une machine produit des articles dont 3% sont défectueux.

I. Calculer la probabilité que parmi 102 articles produits il y ait :

1. *Deux articles défectueux.*
2. *Cinq articles défectueux.*

II. Calculer les probabilités demandées plus haut, en utilisant une approximation par une loi de Poisson. Cette approximation est-elle justifiée ?

<u>Exercice 2</u> : (12 pts)

I. Dans un pays donné la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 155 centimètres, et d'écart-type 7 centimètres.

1. *On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit supérieure à 170 centimètres.*
2. *On choisit une femme au hasard, calculer la probabilité que sa taille soit comprise entre 150 et 157 centimètres.*
3. *Donner la taille maximale des 15% des femmes les plus petites.*

II. Dans ce même pays, on considère maintenant la population totale (hommes et femmes), pour les femmes on conserve les mêmes données que celles de la partie I, donc la taille des femmes notée X suit une loi normale d'espérance 155 centimètres, et d'écart-type 7 centimètres, et la taille des hommes notée Y suit une loi normale d'espérance 174 centimètres et d'écart-type 8 centimètres. Les femmes représentent 51.3% de la population totale (par conséquent les hommes représentent 48.7% de la population totale).

1. *On choisit une personne au hasard dans la population totale, calculer la probabilité que sa taille soit supérieure à 170 cm.*
2. *Quelle est la probabilité qu'une personne mesurant plus de 170 cm soit une femme ?*

~ Corrigé ~
— Sujet 3 —

Exercice 1 : Ici X suit une loi $\mathcal{B}(102,\ 0{,}03)$

I. $P(X=2) = 0{,}2204$ 02pts $\quad P(X=5) = 0{,}1054$ 02pts

II. Approximation par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. $P(X=k) = \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$.

$\lambda = n \cdot p = 102 \times 0{,}03 = 3{,}06$.

$$P(X=2) = \frac{(3{,}06)^2}{2!} e^{-3{,}06} = 0{,}2195, \quad P(X=5) = \frac{(3{,}06)^5}{5!} e^{-3{,}06} = 0{,}1048.$$

01pt $\quad$ 01pt

L'approximation est justifiée $p = 0{,}03 < 0{,}1$ et $n = 102 \geqslant 50$.

02pts

Exercice 2 : $X \rightsquigarrow N(155, 7) = N(155, 7)$

I. 1. $P(X > 170) = 1 - 0{,}9838 = 0{,}0162$ 01pt

2. $P(150 \leqslant X \leqslant 157) = 0{,}7611 + 0{,}6141 - 1 = 0{,}3752$ 02pts

3. $P(X \leqslant t) = 0{,}15 = 15\%$ (on cherche t)

On trouve $t = 147{,}72$ donc $t \simeq 148$ cm 03pts

Donc les 15% des femmes les plus petites ont une taille maximale de 148 cm.

II. $X \rightsquigarrow N(155, 7)$ et $Y \rightsquigarrow N(174, 8)$

On note A : la taille de la personne est plus grande que 170 cm

F : La personne est une femme

H : La personne est un homme

Système complet d'événements. 1pt

1. $P(A) = P(A/F) \cdot P(F) + P(A/H) \cdot P(H)$ probabilités totales

$= 0{,}0162 \times 0{,}513 + 0{,}6915 \times 0{,}487 = 0{,}3451$. 02pts

1pt

2. $P(F/A) = \dfrac{P(F \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A/F) \cdot P(F)}{P(A/F) \cdot P(F) + P(A/H) P(H)}$ (Probabilité conditionnelle ou Formule de Bayes)

$= \dfrac{0{,}0162 \times 0{,}513}{0{,}3451} = 0{,}023$. 02pts