Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2023-2024
1ère Année-L1
MATH1

Contrôle

***Exercice 1 :** (04 pts)*

Soient a et b deux réels, montrer que

$$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Rightarrow (a + b + ab \neq -1)$$

***Exercice 2 :** (06 pts = 2pts + 4pts)*

1. *Montrer par récurrence que*

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. ***Déduire** de ce qui précède la valeur de*

$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + 99^2 - 100^2$$

***Exercice 3 :** (06 pts = 3pts + 3pts)*

1. *Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.*
2. *Soient $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$, résoudre l'équation*

$$m + n\sqrt{2} = 0$$

Corrigé

Exercice 1:

$(a \neq -1 \text{ et } b \neq -1) \Longrightarrow (a+b+ab \neq -1)$.

Nous allons démontrer cela par contraposée. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

$(a+b+ab=-1) \Longrightarrow \underbrace{(a=-1 \text{ ou } b=-1)}_{\text{Loi de Morgan.}}$ 01pt

$$a+b+ab=-1 \Longrightarrow a+b+ab+1=0$$
$$\Longrightarrow a+b(1+a)+1=0$$
$$\Longrightarrow (1+a)(b+1)=0$$
$$\Longrightarrow a=-1 \text{ ou } b=-1. \quad \text{cqfd}$$ 03pts

Remarque: On acceptera aussi une démonstration par l'absurde, si celle-ci est bien faite

Exercice 2:

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Par récurrence.

Pour $n=1$ on $\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$ égalité vérifiée pour $n=1$ 0,5pt

On suppose que pour $n \geq 1$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (H.R) 0,5pt

Il faut montrer que $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \quad \text{(par HR)}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \text{cqfd}$$

01pt

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

2. $1-2^2+3^2-4^2+\cdots+99^2-100^2 = (1-2^2)+(3^2-4^2)+\cdots+(99^2-100^2)$

$= (1-2)(1+2)+(3-4)(3+4)+\cdots+(99-100)(99+100)$

$= (-1)(1+2)+(-1)(3+4)+\cdots+(-1)(99+100)$

$= (-1)(1+2+3+4+\cdots+99+100)$

$= (-1)\sum_{k=1}^{100} k \underset{\text{D'après la question 1}}{=\!=\!=} (-1).\dfrac{100(100+1)}{2} = (-1)\times 50\times 101$

$= -5050$

04pts

Exercice 3:

1. $\sqrt{2}$ est irrationnel; en effet supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ est rationnel, donc $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ forme irréductible $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{Z}^*$. 00,5pt

$\sqrt{2}=\dfrac{p}{q} \Rightarrow 2=\dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2=2q^2 \Rightarrow p^2$ est pair $\Rightarrow p$ est pair

Montrons que si p^2 est pair alors p est pair par contraposée

p est impair $\Rightarrow p^2$ est impair

en effet p est impair $\Rightarrow p=2k+1 \Rightarrow p^2=(2k+1)^2 \Rightarrow p^2=4k^2+4k+1$

$\Rightarrow p^2=2(2k^2+2k)+1 \Rightarrow p^2=2k'+1.$

$\Rightarrow p^2$ est impair.

01,5pt

Donc $p=2k$

or $p^2=2q^2 \Rightarrow (2k)^2=2q^2 \Rightarrow 4k^2=2q^2 \Rightarrow q^2=2k^2 \Rightarrow q^2$ est pair

$\Rightarrow q$ est pair

Donc p est pair et q est pair ainsi $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ n'est pas irréductible (puisqu'on peut simplifier par 2) d'où la contradiction.

01pt

$\sqrt{2}$ est irrationnel.

2. $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

$m + n\sqrt{2} = 0 \Rightarrow n\sqrt{2} = -m$

1^er^ cas : si $n = 0$

alors $0 \times \sqrt{2} = -m \Rightarrow m = 0$

Donc $m = n = 0$.

01pt

2^ème^ cas si $n \neq 0$.

$m + n\sqrt{2} = 0 \Rightarrow n\sqrt{2} = -m \Rightarrow \sqrt{2} = -\frac{m}{n}$ impossible

Car $\sqrt{2}$ est irrationnel $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{Z}^*$.

02pts

En conclusion l'unique solution est $m = n = 0$.