Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Année 2010-2011

$1^{ère}$ Année MI

Algèbre II

Contrôle continu

Exercice 1 : (08 pts)

On munit $\mathbb{R}-\{-3\}$ de la loi $*$ définie comme suit :

$$x * y = xy + 3(x + y + 2)$$

1. Vérifier que $*$ est une l.c.i (loi de composition interne).
2. Montrer que $(\mathbb{R}-\{-3\},*)$ est un groupe commutatif.
3. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}^*,.) &\longrightarrow (\mathbb{R}-\{-3\},*) \\ x &\mapsto f(x) = x-3 \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes. Où " . " désigne la multiplication usuelle.

Exercice 2 : (12 pts)

Soient les ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y+z = 0\} \quad ;$$

$$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x+y-z = 0\};$$

$$\text{et } E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x-y = x+z = 0\}.$$

1. Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que $\mathcal{B}_1 = \{(2,-2,0),\ (0,-1,1)\}$ est une famille libre et génératrice de E_1 ; en déduire $\dim E_1$.
3. Donner $\dim E_2$ et $\dim E_3$.
4. Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_3$.
5. <u>Sans calculer</u> $(E_1 \cap E_2)$ <u>et sans calculer</u> $\dim(E_1 \cap E_2)$; montrer que E_1 et E_2 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
6. E_2 et E_3 sont-ils supplémentaires l'un à l'autre dans $\mathbb{R}^3$?

Exercice 1: Sur $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; $*$ définie par $x*y = xy+3(x+y+2)$.

1. $*$ est une l.c.i ; On peut le démontrer par l'absurde ou par contraposée.

Par l'absurde supposons que $*$ n'est pas interne i.e. pour $x\neq -3$ et $y\neq -3$; $x*y=-3$

$$x*y=-3 \Rightarrow xy+3x+3y+6=-3 \Rightarrow x(y+3)=-3y-9 \Rightarrow x=\frac{-3y-9}{y+3} \quad (y\neq -3)$$

$$\Rightarrow x=-3\,\frac{y+3}{y+3} \underset{y\neq -3}{\Longrightarrow} x=-3 \text{ absurde } (x\neq -3).$$

Donc $*$ est une l.c.i dans $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ (2pts).

[2ème méthode par contraposée ; montrons que $x*y=-3 \Rightarrow x=-3$ ou $y=-3$.

$x*y=-3 \Rightarrow xy+3x+3y+6=-3 \Rightarrow xy+3x+3y+9=0 \Rightarrow (x+3)(y+3)=0 \Rightarrow x=-3$ ou $y=-3$]

2. $(\mathbb{R}\setminus\{-3\},*)$ groupe commutatif.

- $*$ commutative : Soit $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$

$x*y = xy+3(x+y+2) = yx+3(y+x+2) = y*x$. $*$ commutative (1pt)

- $*$ associative : Soit $x,y,z\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$$\left.\begin{aligned}(x*y)*z &= xyz+3xz+3yz+3xy+9z+9x+9y+24\\ x*(y*z) &= xyz+3xz+3yz+3xy+9x+9y+9z+24\end{aligned}\right\} \Rightarrow (x*y)*z = x*(y*z) \quad * \text{ associative} \quad (1pt)$$

- élément neutre e : Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$$x*e=x \Rightarrow xe+3(x+e+2)=x \Rightarrow e(x+3)=-2x-6 \underset{x\neq -3}{\Longrightarrow} e=-2\,\frac{x+3}{x+3} \underset{x\neq -3}{\Longrightarrow} \boxed{e=-2} \quad (1pt)$$

- élément symétrique : Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

$$x*x' = e = -2 \Rightarrow xx'+3(x+x'+2)=-2 \Rightarrow x'(x+3)=-3x-8 \underset{x\neq -3}{\Longrightarrow} \boxed{x'=\frac{-3x-8}{x+3}} \quad (0,5pt)$$

reste à vérifier que $x'\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$; par l'absurde supposons que $x'=-3$.

$$x'=-3 \Rightarrow \frac{-3x-8}{x+3}=-3 \Rightarrow -3x-8=-3x-9 \Rightarrow -8=-9 \text{ absurde } \boxed{x'\neq -3} \quad (0,5pt)$$

3. $f:(\mathbb{R}^*,\cdot) \longrightarrow (\mathbb{R}\setminus\{-3\},*)$; $f(x)=x-3$; homomorphisme de groupe.

Soit $x,y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}=\mathbb{R}^*$; $f(x\cdot y)=x\cdot y-3$; d'un autre côté Calculons $f(x)*f(y)$.

$$f(x)*f(y) = f(x)\cdot f(y)+3(f(x)+f(y)+2) = (x-3)(y-3)+3(x-3+y-3+2) = xy-3x-3y+9+3x+3y-12$$

$$f(x)*f(y) = x\cdot y-3 = f(x\cdot y).$$

i.e $\forall x,y\in\mathbb{R}\setminus\{-3\}$ $f(x\cdot y)=f(x)*f(y)$ donc f homomorphisme de groupe. (02pts).

[Remarque : f étant bijectif c'est un isomorphisme]

Exercice 2 : $E = \mathbb{R}^3$.

$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ;\ x+y+z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ z=-x-y\} = \{(x,y,-x-y) ;\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

$E_2 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x+y-z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ z=x+y\} = \{(x,y,x+y) ;\ x,y\in\mathbb{R}\}$.

$E_3 = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x-y=x+z=0\} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 ;\ x=y \text{ et } z=-x\} = \{(x,x,-x) ;\ x\in\mathbb{R}\}$.

1. $E_1 \underset{ser}{\subset} \mathbb{R}^3$

1ère méthode : • $E_1 \neq \emptyset$ en effet $(0,0,0) ; (1,1,-2) \in E_1$.

• Soit $X, Y \in E_1$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$; $(\lambda X + \mu Y) \overset{?}{\in} E_1$?

$X \in E_1 \Rightarrow X = (x,y,z) ;\ x+y+z=0$. $\quad Y \in E_1 \Rightarrow Y = (x',y',z') ;\ x'+y'+z'=0$.

$(\lambda X + \mu Y) = \lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') = (\lambda x+\mu x', \lambda y+\mu y', \lambda z+\mu z')$ or : $(\lambda x+\mu x')+(\lambda y+\mu y')+(\lambda z+\mu z')$
$= \lambda(x+y+z)+\mu(x'+y'+z') = 0$.

i.e. $(\lambda X+\mu Y)\in E_1$. ie $E_1 \underset{ser}{\subset} \mathbb{R}^3$.

2ème méthode : • $E_1 \neq \emptyset$ $\quad (0,0,0) ;\ (1,1,-2)\in E_1$.

Soit $X, Y\in E_1$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ $\quad (\lambda X+\mu Y) \overset{?}{\in} E_1$?

$X\in E_1 \Rightarrow X = (x,y,-x-y)$ $\quad x,y\in\mathbb{R}$; $\quad Y\in E_1 \Rightarrow Y=(x',y',-x'-y')$; $x',y'\in\mathbb{R}$.

$\lambda X+\mu Y = \lambda(x,y,-x-y)+\mu(x',y',-x'-y') = (\underbrace{\lambda x+\mu x'}_{\alpha}, \underbrace{\lambda y+\mu y'}_{\beta}, \underbrace{-(\lambda x+\mu x')-(\lambda y+\mu y')}_{-\alpha-\beta}) \in E_1$

$E_1 \underset{ser}{\subset} \mathbb{R}^3$ (0,5pt)

Idem $E_2 \underset{ser}{\subset} \mathbb{R}^3$ (0,5pt) ; et $E_3 \underset{ser}{\subset} \mathbb{R}^3$ (0,5pt).

2. $\mathcal{B}_1 = \{(2,-2,0), (0,-1,1)\}$. (On remarquera que $\mathcal{B}_1 \subset E_1$).

• famille libre Soit $\lambda_1, \lambda_2\in\mathbb{R}$; $\lambda_1(2,-2,0)+\lambda_2(0,-1,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ -2\lambda_1-\lambda_2=0 \\ \lambda_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$.

Donc $\mathcal{B}_1$ famille libre (0,5pt)

• famille génératrice : Soit $X\in E_1 \Rightarrow X = (x,y,-x-y)$ $\quad x,y\in\mathbb{R}$.

$X = (x,y,-x-y) = \alpha(2,-2,0)+\beta(0,-1,1) = (2\alpha, -2\alpha-\beta, \beta) \Rightarrow \begin{cases} x = 2\alpha \\ y = -2\alpha-\beta \\ -x-y = \beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha = \frac{x}{2} \\ \beta = -x-y.\end{cases}$

Donc $\forall X \in (x,y,-x-y)\in E_1$, $\exists \alpha = x/2$; $\beta = -x-y$ tels que

$X = \alpha(2,-2,0)+\beta(0,-1,1)$ $\quad ((x,y,-x-y) = x/2\,(2,-2,0) + (-x-y)(0,-1,1))$.

Donc $\mathcal{B}_1$ famille génératrice (1pt)

$\mathcal{B}_1$ base de $E_1 \Longrightarrow \dim E_1 = 2$

3. $\dim E_2$ et $\dim E_3$; il suffit de trouver une base de E_2 et une base de E_3.

$X \in E_2 \Rightarrow X=(x,y,x+y)$; $x,y \in \mathbb{R} \Leftrightarrow X = x(1,0,1)+y(0,1,1)$.

Donc $\mathcal{B}_2=\{(1,0,1);(0,1,1)\}$ est une famille génératrice de E_2.

Soit $d_1,d_2 \in \mathbb{R}$; $d_1(1,0,1)+d_2(0,1,1)=(0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} d_1=0 \\ d_2=0 \\ d_1+d_2=0 \end{cases} \Rightarrow d_1=d_2=0 \Rightarrow \mathcal{B}_2$ famille libre.

$\mathcal{B}_2$ base de $E_2 \Rightarrow \dim E_2 = 2$ (1pt).

Idem $X \in E_3 \Rightarrow X=(x,x,-x)$; $x \in \mathbb{R} \Rightarrow X = x(1,1,-1) \Rightarrow \mathcal{B}_3=\{(1,1,-1)\}$ famille génératrice.

Comme $(1,1,-1) \neq (0,0,0)$ $\mathcal{B}_3$ est libre $\Rightarrow \mathcal{B}_3$ base de $E_3 \Rightarrow \dim E_3 = 1$ (1pt)

4. $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_3$ il faut m.q $\begin{cases} E_1 \cap E_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ E_1+E_3 = \mathbb{R}^3 \end{cases}$ on choisira la méthode que l'on veut. (Voir T.D).

Par exemple : $X \in E_1 \cap E_3 \Rightarrow X=(x,y,z)$ et $\begin{cases} X \in E_1 \\ X \in E_3 \end{cases} \Rightarrow X=(x,y,z)$ et $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow X=(x,y,z)$ et $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow X=(0,0,0)$.

Donc $E_1 \cap E_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (on a montré que $E_1 \cap E_3 \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ mais $\{0_{\mathbb{R}^3}\} \subset E_1 \cap E_3$ trivial)

(1pt)

D'un autre côté : $\dim(E_1+E_3) = \dim E_1 + \dim E_3 - \dim(E_1 \cap E_3)$.
$= 2 + 1 - 0 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

or $(E_1+E_3) \underset{sev}{\subset} \mathbb{R}^3$ et $\dim(E_1+E_3) = \dim \mathbb{R}^3$ donc $(E_1+E_2) = \mathbb{R}^3$ (1pt).

5. Supposons "par l'absurde" que E_1 et E_2 sont supplémentaires

on a donc $\begin{cases} E_1 \cap E_2 = \{0_{\mathbb{R}^3}\} \\ E_1+E_2 = \mathbb{R}^3 \end{cases}$ or $\dim(E_1+E_2) = \dim E_1 + \dim E_2 - \dim(E_1 \cap E_2)$
$= 2 + 2 - 0 = 4$ impossible

Car $(E_1+E_2) \underset{sev}{\subset} \mathbb{R}^3$ donc $\dim(E_1+E_2) \leq 3$. donc E_1 et E_2 ne sont pas supplémentaires.

(03pts)

6. E_2 et E_3 sont-ils supplémentaires l'un à l'autre ?

Soit $X \in E_2 \cap E_3 \Rightarrow \begin{cases} X \in E_2 \\ \text{et} \\ X \in E_3 \end{cases} \Rightarrow X=(x,y,z)$ et $\begin{cases} x+y-z=0 \\ x-y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x=0 \\ x=y \\ -x=+z \end{cases} \Rightarrow x=y=z=0$.

Donc $E_2 \cap E_3 = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. (1pt)

D'un autre côté : $\dim(E_2+E_3) = \dim E_2 + \dim E_3 - \dim(E_2 \cap E_3) = 2+1-0 = 3$
$= \dim \mathbb{R}^3$.

$(E_2+E_3) \underset{sev}{\subset} \mathbb{R}^3$ et $\dim(E_2+E_3) = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. donc $E_2+E_3 = \mathbb{R}^3$.

Donc $E_2 \oplus E_3 = \mathbb{R}^3$ E_2 et E_3 sont supplémentaires (1pt)

[Remarque : $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_3 = E_2 \oplus E_3$.
le supplémentaire de E_3 n'est pas unique.]