Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
1ère Année MI
Algèbre II

Contrôle continu

***Exercice 1** : (08 points)*

Soit

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z},2\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{y})$$

1. ***Vérifier que f est une application linéaire.***
2. ***Déterminer kerf le noyau de f, puis donner dim(kerf).***
3. ***f est-elle injective ? f est elle-surjective ? f est-elle bijective ?***
4. ***Donner dim(Imf) ; puis donner une base de Imf.***

***Exercice 2** : (07 points)*

Soient les ensembles suivants :

$\boldsymbol{E_1} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3; \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-3\boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}\}$ ***et*** $\boldsymbol{E_2} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\alpha x},\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^3; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}\}$ ***où*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***est un paramètre réel.***

1. ***Montrer que*** $\boldsymbol{E_1}$ ***et*** $\boldsymbol{E_2}$ ***sont des sous espaces vectoriels de*** $\mathbb{R}^3$ ***.***
2. ***Donner une base de*** $\boldsymbol{E_1}$ ***et une base de*** $\boldsymbol{E_2}$ ***; et en déduire*** $\boldsymbol{dim\,E_1}$ ***et*** $\boldsymbol{dim\,E_2}$
3. ***Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***a-t-on :*** $\mathbb{R}^3 = \boldsymbol{E_1} \oplus \boldsymbol{E_2}$ ***?***

***Exercice 3** : (05 points)*

Soit $\boldsymbol{F} = \{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in \mathbb{R}^3;\ \boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{y}^2 + \boldsymbol{z}^2 + 2\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}\}$

$\boldsymbol{F}$ ***ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de*** $\mathbb{R}^3$ ***? Si oui donner sa dimension.***