Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen — *Année 2010-2011*

Faculté des Sciences — *1ère Année MI*

Département de Mathématiques — *Algèbre II*

Contrôle continu

Exercice 1 : (08 pts)

On munit $\mathbb{R}-\{-3\}$ de la loi $*$ définie comme suit :

$$x * y = xy + 3(x + y + 2)$$

1. ***Vérifier que $*$ est une l.c.i (loi de composition interne).***
2. ***Montrer que $(\mathbb{R}-\{-3\},*)$ est un groupe commutatif.***
3. ***Montrer que l'application***

$$\begin{aligned} f: (\mathbb{R}^*,.) &\longrightarrow (\mathbb{R}-\{-3\},*) \\ x &\mapsto f(x) = x-3 \end{aligned}$$

est un homomorphisme de groupes. Où " ." désigne la multiplication usuelle.

Exercice 2 : (12 pts)

Soient les ensembles suivants :

$$E_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\} \quad ;$$

$$E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x + y - z = 0\};$$

$$\text{et } E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x - y = x + z = 0\}.$$

1. ***Montrer que E_1, E_2 et E_3 sont des sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.***
2. ***Montrer que $\mathcal{B}_1 = \{(2,-2,0),\ (0,-1,1)\}$ est une famille libre et génératrice de E_1 ; en déduire $\dim E_1$.***
3. ***Donner $\dim E_2$ et $\dim E_3$.***
4. ***Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_3$.***
5. ***<u>Sans calculer</u> $(E_1 \cap E_2)$ <u>et sans calculer</u> $\dim(E_1 \cap E_2)$; montrer que E_1 et E_2 ne sont pas supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.***
6. ***E_2 et E_3 sont-ils supplémentaires l'un à l'autre dans $\mathbb{R}^3$?***