Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
$1^{ère}$ Année MI
Algèbre I

Contrôle continu

***Exercice 1** : (06 pts)*

1. *Résoudre l'équation diophantienne suivante :*

$$246x + 134y = 20.$$

***Exercice 2** : (07 pts)*

Soit l'application f définie comme suit :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = |2x+5| \end{aligned}$$

1. *f est-elle injective ?*
2. *f est-elle surjective ?*
3. *Trouver les plus grands intervalles possibles $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ tels que l'application :*

$$\begin{aligned} g : A &\longrightarrow B \\ x &\mapsto g(x) = |2x+5| \end{aligned}$$

soit une application bijective.

4. *Donner alors l'expression de $g^{-1}(x)$.*

***Exercice 3** : (07 pts)*

Soit f et g deux applications définies de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x+2 & si\ x < 0 \\ x+2 & si\ x \geq 0 \end{cases} \quad et \quad g(x) = \begin{cases} x+2 & si\ x < 1 \\ 4x-1 & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

1. *Donner les expressions de $(f \circ g)(x)$ et $(g \circ f)(x)$.*
2. *Montrer que g est bijective.*
3. *Trouver les applications h_1 et h_2 telles que $g \circ h_1 = f$ et $h_2 \circ g = f$.*

· Corrigé Contrôle Continu ·

— Algèbre I —

EXERCICE 1: $246x + 134y = 20.$

<u>1ère étape</u>: Par l'algorithme d'Euclide on trouve $\text{pgcd}(246,134) = 2$. (1pt)

<u>2ème étape</u>: Simplifier l'équation $246x + 134y = 20 \Leftrightarrow 123x + 67y = 1$ (1pt)

<u>3ème étape</u>: Appliquer l'identité de Bézout, en remarquant que $\text{pgcd}(123,67) = 1$.
Il existe alors deux entiers u, v tels que $123u + 67v = 1$ on trouve $u = 6$, $v = -11$ (1pt)

<u>4ème étape</u>: Solution particulière $123x_0 + 67y_0 = 10$; il suffit de prendre

$x_0 = 10u = 60$, $y_0 = 10v = -110$ i.e $(x_0, y_0) = (60, -110)$ (1pt).

<u>5ème étape</u>: Soit (x,y) une solution de l'équation $123x + 67y = 10$ on a alors

$$\begin{cases} 123x + 67y = 10 \\ 123x_0 + 67y_0 = 10 \end{cases} \Rightarrow 123(x - x_0) = 67(y_0 - y) \Rightarrow 123(x-60) = 67(-110-y).$$

Comme $123 \wedge 67 = 1$ et d'après le lemme de Gauss on obtient : $67 / (x-60)$.
d'où $x - 60 = 67k$ $(k \in \mathbb{Z})$ i.e $x = 60 + 67k$. $k \in \mathbb{Z}$.

d'un autre côté $123 \times 67k = 67(-110-y) \Rightarrow y = -110 - 123k$ $k \in \mathbb{Z}$

l'ensemble des solutions est donné par : $\{(x,y) = (60+67k, -110-123k),\ k \in \mathbb{Z}\}$ (02pts)

EXERCICE 2:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = |2x+5|. \quad \text{i.e} \quad f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{si } x \geq -5/2 \\ -2x-5 & \text{si } x \leq -5/2. \end{cases}$$

1°/ Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$.

<u>1er cas</u>: $x_1 \geq -5/2$ et $x_2 \geq -5/2$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = x_2$.

<u>2ème cas</u>: $x_1 \leq -5/2$ et $x_2 \leq -5/2$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2x_1 - 5 = -2x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = x_2$.

<u>3ème cas</u>: $x_1 \geq -5/2$ et $x_2 \leq -5/2$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 5 = -2x_2 - 5 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 5$

La dernière équation a bien un sens car si $x_2 \leq -5/2 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 5 \geq -5/2$.

<u>4ème cas</u>: $x_1 \leq -5/2$ et $x_2 \geq -5/2$; $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2x_1 - 5 = 2x_2 + 5 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 5$.

La dernière équation a bien un sens car si $x_2 \geq -5/2 \Rightarrow x_1 = -x_2 - 5 \leq -5/2$.

<u>Conclusion</u>: f n'est pas injective (3ème et 4ème cas) il suffit de considérer <u>par exemple</u>
$x_2 = 6$ et $x_1 = -x_2 - 5 = -11$; $f(6) = |17| = 17$; $f(-11) = |-17| = 17$.

$f(6) = f(-11)$ et $6 \neq -11$ f n'est pas injective (02pts)

2°/ Il est clair que: $f(x)=|2x+5|\geqslant 0$.

Donc si $y<0$, l'équation $y=f(x)$ n'a pas de solution

i.e par exemple $y=-3$ ne possède pas d'antécédant par f

f n'est donc pas surjective. (01pt)

3°/ D'après l'étude précédente il suffit de prendre

$A=[-\frac{5}{2},+\infty[$ (1pt) et $B=[0,+\infty[$ (1pt) : $g:[-\frac{5}{2},+\infty[\longrightarrow[0,+\infty[$, $x\longmapsto 2x+5$.

(ou bien $A=]-\infty,-\frac{5}{2}]$ et $B=[0,+\infty[$: $g:]-\infty,-\frac{5}{2}]\longrightarrow[0,+\infty[$, $x\longmapsto -2x-5$.)

4°/ Donc : $g^{-1}:[0,+\infty[\longrightarrow[-\frac{5}{2},+\infty[$, $x\longmapsto\frac{x-5}{2}$ (ou bien $g^{-1}:[0,+\infty[\longrightarrow]-\infty,-\frac{5}{2}]$, $x\longmapsto-\frac{x+5}{2}$) (02pts)

Exercice 3: $f(x)=\begin{cases}3x+2 & \text{si } x<0\\ x+2 & \text{si } x\geqslant 0\end{cases}$ $\qquad g(x)=\begin{cases}x+2 & \text{si } x<1\\ 4x-1 & \text{si } x\geqslant 1.\end{cases}$

Remarque: $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ donc $f\circ g$ et $g\circ f$ ont bien un sens.

1°/ $(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}3g(x)+2 & \text{si } g(x)<0\\ g(x)+2 & \text{si } g(x)\geqslant 0.\end{cases}$

• $g(x)<0 \iff \begin{cases}x+2<0 \text{ et } x<1\\ \text{ou}\\ 4x-1<0 \text{ et } x\geqslant 1\end{cases} \iff \begin{cases}x<-2 \text{ et } x<1\\ \text{ou}\\ x<1/4 \text{ et } x\geqslant 1\end{cases} \Rightarrow x<-2.$

Donc $g(x)<0$ pour $x<-2$ et dans ce cas $g(x)=x+2$.

• $g(x)\geqslant 0 \iff \begin{cases}x+2\geqslant 0 \text{ et } x<1\\ \text{ou}\\ 4x-1\geqslant 0 \text{ et } x\geqslant 1\end{cases} \iff \begin{cases}x\geqslant -2 \text{ et } x<1\\ \text{ou}\\ x\geqslant 1/4 \text{ et } x\geqslant 1.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\leq x<1\\ \text{ou}\\ x\geqslant 1.\end{cases}$

Donc $g(x)\geqslant 0$ pour $\begin{cases}-2\leqslant x<1 & \text{et dans ce cas } g(x)=x+2.\\ \text{ou} & \\ x\geqslant 1 & \text{et dans ce cas } g(x)=4x-1.\end{cases}$

Donc $(f\circ g)(x)=\begin{cases}3(x+2)+2 & \text{si } x<-2.\\ (x+2)+2 & \text{si } -2\leqslant x<1.\\ (4x-1)+2 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases} \Rightarrow (f\circ g)(x)=\begin{cases}3x+8 & \text{si } x<-2.\\ x+4 & \text{si } -2\leqslant x<1\\ 4x+1 & \text{si } x\geqslant 1\end{cases}$

(02pts)

•• $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} f(x)+2 & \text{si } f(x)<1 \\ 4f(x)-1 & \text{si } f(x)\geq 1. \end{cases}$

$f(x)<1 \iff \begin{cases} 3x+2<1 \text{ et } x<0 \\ \text{ou} \\ x+2<1 \text{ et } x\geq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-1/3 \text{ et } x<0 \\ \text{ou} \\ x<-1 \text{ et } x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x<-1/3.$

Donc $f(x)<1$ pour $x<-1/3$ et dans ce cas $f(x)=3x+2$.

$f(x)\geq 1 \Rightarrow \begin{cases} 3x+2\geq 1 \text{ et } x<0 \\ \text{ou} \\ x+2\geq 1 \text{ et } x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq -1/3 \text{ et } x<0 \\ \text{ou} \\ x\geq -1 \text{ et } x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3}\leq x < 0 \\ \text{ou} \\ x\geq 0. \end{cases}$

Donc $f(x)\geq 1$ pour $\begin{cases} -1/3\leq x<0 & \text{et dans ce cas } f(x)=3x+2 \\ \text{ou} & \\ x\geq 0 & \text{et dans ce cas } f(x)=x+2. \end{cases}$

Donc $(g\circ f)(x) = \begin{cases} (3x+2)+2 & \text{si } x<-1/3 \\ 4(3x+2)-1 & \text{si } -\frac{1}{3}\leq x<0 \\ 4(x+2)-1 & \text{si } x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow (g\circ f)(x) = \begin{cases} 3x+4 & \text{si } x<-1/3 \\ 12x+7 & \text{si } -1/3\leq x<0 \\ 4x+7 & \text{si } x\geq 0 \end{cases}$

(02pts)

2°/ g est bijective ; en effet remarquons d'abord que :

$\begin{cases} x<1 \Rightarrow x+2<3 \Rightarrow g(x)<3 \\ x\geq 1 \Rightarrow 4x-1\geq 3 \Rightarrow g(x)\geq 3 \end{cases}$

Soit $y\in\mathbb{R}$; résolvons l'équation $y=g(x)$ $\begin{cases} \text{si } y<3 \Rightarrow y=x+2 \Rightarrow x=y-2<1 \\ \text{si } y\geq 3 \Rightarrow y=4x-1 \Rightarrow x=\frac{y+1}{4}\geq 1 \end{cases}$

Donc $\forall y\in\mathbb{R}, \exists! x\in\mathbb{R} ; y=g(x)$ (l'équation $y=g(x)$ possède une solution unique $x\in\mathbb{R}$.)

g est donc bijective (on peut aussi montrer que g est injective et surjective!)

((01pt))

3°/ Comme g est bijective g^{-1} existe

$g\circ h_1 = f \Rightarrow g^{-1}\circ g\circ h_1 = g^{-1}\circ f \Rightarrow h_1 = g^{-1}\circ f$ ((1pt))

$h_2\circ g = f \Rightarrow h_2\circ g\circ g^{-1} = f\circ g^{-1} \Rightarrow h_2 = f\circ g^{-1}$ ((1pt))