Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2009-2010
1ère Année MI
Algèbre I

Contrôle continu

Exercice 1 :

1. Résoudre l'équation diophantienne suivante :

$$37x + 27y = 1000$$

2. Préciser x et y sachant que x représente le nombre d'étudiants inscrits en 2ème année Licence Mathématiques et y le nombre d'étudiants inscrits en 3ème année Licence Mathématiques.

Exercice 2 :

I. Soit l'application f définie comme suit :

$$f: \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{x+1}{2x-1}$$

1. f est-elle injective ?
2. f est-elle surjective ?
3. Donner l'expression de $(f \circ f)(x)$.
4. Par deux méthodes différentes, retrouver l'expression de $f^{-1}(x)$.

II. Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit g définie comme suit :

$$g: \mathbb{R} - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{y_0\}$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

1. Comment doit- on choisir le réel x_0 pour que g soit une application ?
2. Comment doit-on choisir a, b, c et d pour que g soit une application injective ?
3. Comment doit- on choisir a, b, c, d et le réel y_0 pour que g soit une application surjective ?
4. Comment doit-on choisir $a, b, c, d,$ x_0 et y_0 pour que g soit une application bijective ?

Barème : Exercice 1 1.: 4pts + 2.: 2pts

Exercice 2 I. 1.: 1,5 pt + 2.: 1,5 pt + 3.: 1,5 pt + 4.: 2,5 pts

II. 1.: 2 pt + 2.: 2 pts + 3.: 2 pts + 4.: 1 pt

Exercice 1 : 1/. Résolution de l'équation diophantienne : $37x+27y=1000$.

1ère étape : pgcd (37, 27), on applique l'algorithme d'Euclide :

$\begin{array}{r|l} 37 & 27 \\ \hline 10 & 1 \end{array}$ $37=27\times1+10$; $\begin{array}{r|l} 27 & 10 \\ \hline 7 & 2 \end{array}$ $27=10\times2+7$; $\begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \hline 3 & 1 \end{array}$ $10=7\times1+3$, $\begin{array}{r|l} 7 & 3 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$ $7=3\times2+\underline{1}$

le pgcd étant le dernier reste non nul $37\wedge27=1$. qui divise 1000 donc l'équation donnée possède des solutions ($37\wedge27=1$ pas de simplifications)

(1pt

2ème étape : D'après l'identité de Bézout $\exists u,v\in\mathbb{Z}$; $37u+27v=1$.

$1=7-3\times2=7-(10-7)\times2=7\times3-10\times2=(27-10\times2)\times3-10\times2=27\times3-10\times8$.

$1=27\times3-(37-27)\times8=27\times11-37\times8$ Donc : $37\times(-8)+27\times11=1$. $\begin{cases} u=-8 \\ v=11. \end{cases}$

(1pt

3ème étape : Recherche d'une solution particulière : (x_0, y_0).

D'après ce qui précède $37\times(-8)+27\times11=1 \Rightarrow 37\times(-8000)+27\times11000=1000$.

Donc $(x_0,y_0)=(-8000, 11000)$ est une solution particulière.

(1pt

4ème étape : Résolution : $-\left.\begin{array}{r} 37x+27y=1000 \\ 37\times(-8000)+27(11000)=1000 \end{array}\right\} \Rightarrow 37(x+8000)+27(y-11000)=0$.

Donc $37(x+8000)=27(11000-y)$; or $(37\wedge27)=1$, donc d'après le lemme de Gauss 27 divise $(x+8000)$ soit $x+8000=27k \Rightarrow x=-8000+27k$ $k\in\mathbb{Z}$.

D'autre part $37\times27k=27(11000-y) \Rightarrow 11000-y=37k \Rightarrow y=11000-37k$ $k\in\mathbb{Z}$.

$$(x,y)=(-8000+27k,\ 11000-37k)\ ,\ k\in\mathbb{Z}.$$ (1pt

2. si x et y représentent des nombres d'étudiants alors $x\geq0$ et $y\geq0$.

$x\geq0 \Rightarrow -8000+27k\geq0 \Rightarrow k\geq\frac{8000}{27}$; $y\geq0 \Rightarrow 11000-37k\geq0 \Rightarrow k\leq\frac{11000}{37}$

Donc k est un entier tel que $\frac{8000}{27}\leq k\leq\frac{11000}{37} \Rightarrow k=297$

$\left.\begin{array}{l} x=-8000+27\times297=19 \\ y=11000-37\times297=11 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y)=(19,11)$. (2pts

EXERCICE 2 : I/ $f : \mathbb{R}\setminus\{1/2\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$; $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$.

1°/ Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ $\quad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \dfrac{x_1+1}{2x_1-1} = \dfrac{x_2+1}{2x_2-1} \Rightarrow (x_1+1)(2x_2-1) = (x_2+1)(2x_1-1)$.

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - x_1 + 2x_2 - 1 = 2x_1x_2 - x_2 + 2x_1 - 1$$

Donc f est injective. (1,5pt $\qquad \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

2°/ $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$; $\exists ?\, x \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$, $y = f(x)$.

Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ qcq ; $\quad y = f(x) \Rightarrow y = \dfrac{x+1}{2x-1} \Rightarrow x(2y-1) = y+1 \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{2y-1}$.

Comme $y \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$ $(2y-1) \neq 0$, de plus $\dfrac{y+1}{2y-1} \neq \dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{y+1}{2y-1} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 2 = -1 \text{ impossible}\right)$.

Donc $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$, $\exists x = \dfrac{y+1}{2y-1} \in \mathbb{R}\setminus\{1/2\}$; tq $y = f(x)$ donc f est surjective (1,5 pt

3°/ Calcul de $(f\circ f)$ on remarquera que
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}\setminus\{1/2\} \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f\circ f"'] & \mathbb{R}\setminus\{1/2\} \arrow[r, "f"] & \mathbb{R}\setminus\{1/2\} \end{tikzcd}$$
; $f\circ f$ existe

$$(f\circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2f(x)-1} = \frac{\frac{x+1}{2x-1}+1}{2\,\frac{x+1}{2x-1}-1} = x.$$ (1,5pt (f est dite involution).

4°/ Expression de $f^{-1}(x)$. On notera que f est bijective donc f^{-1} existe (0,5pt

1ère méthode : $y = f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1} \Rightarrow x = \dfrac{y+1}{2y-1} = f^{-1}(y)$ donc $f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$. (1pt

2ème méthode : $\quad f\circ f = Id \Rightarrow f^{-1}\circ f\circ f = f^{-1}\circ Id \Rightarrow f = f^{-1} \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) = \dfrac{x+1}{2x-1}$ (1pt

II/ $g : \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}\setminus\{y_0\}$; $g(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

1°/ Il faut choisir x_0 tel que $cx_0 + d = 0 \Rightarrow x_0 = -d/c$. C'est le seul point qui n'a pas d'image par g. (2pts

2°/ Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}\setminus\{x_0\}$; $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow \dfrac{ax_1+b}{cx_1+d} = \dfrac{ax_2+b}{cx_2+d} \Rightarrow (ax_1+b)(cx_2+d) = (ax_2+b)(cx_1+d)$

$$\Rightarrow acx_1x_2 + adx_1 + bcx_2 + bd = acx_1x_2 + adx_2 + bcx_1 + bc$$

$\Rightarrow ad(x_1 - x_2) + bc(x_2 - x_1) = 0 \Rightarrow (ad-bc)(x_1 - x_2) = 0 \xRightarrow[\text{si } ad-bc\neq 0]{} x_1 = x_2$

Donc $ad - bc \neq 0 \Rightarrow g$ injective. (2pts

3°/ Soit $y \in \mathbb{R}\setminus\{y_0\}$ $\quad y = g(x) \Rightarrow y = \dfrac{ax+b}{cx+d} \Rightarrow x = \dfrac{-dy+b}{cy-a}$ $\quad \boxed{y_0 = a/c}$ avec $ad-bc \neq 0$ (2pts

4°/ $(ad - bc \neq 0,\ x_0 = -d/c,\ y_0 = a/c) \Rightarrow g$ application bijective. (1pt