Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen | *Année 2010-2011*
Faculté des Sciences | *M1 Systèmes dynamiques*
Département de Mathématiques | *Equations fonctionnelles I*

Contrôle continu

Exercice 1 :

Soit le modèle suivant décrivant la dynamique des populations $n_1(t)$ et $n_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{n}_1 = rn_1\left(1 - \dfrac{n_1}{K_1 + an_2}\right) \\ \dot{n}_2 = rn_2\left(1 - \dfrac{n_2}{K_2 + bn_1}\right) \end{cases} \qquad (S1)$$

Les variables ainsi que les paramètres sont tous supposés positifs.

1- ***Donner une interprétation du modèle en précisant le type d'interaction entre les deux populations.***
2- ***Trouver une condition sur les paramètres ; pour que le système $(S1)$ possède 4 points d'équilibre dans le quadrant positif.***
Par la suite on supposera que le système $(S1)$ possède 4 points d'équilibre dans le quadrant positif.
3- ***Etudier la stabilité locale des points d'équilibre.***
4- ***Tracer le portrait de phase.***
5- ***Proposer une amélioration (plus réaliste) du modèle $(S1)$. (facultatif)***

Exercice 2 : (Lemme de comparaison)

Soit x et y définis pour $t \geq 0$; soit $f(t,x)$ une fonction $k-$lipschitzienne par rapport à x tels que

$$\dot{x} = f(t,x), \qquad \dot{y} \geq f(t,y) \quad et \quad x(0) = y(0).$$

Montrer alors que

$$\forall t \geq 0; \; x(t) \leq y(t)$$