Sur un problème faisant intervenir le p-laplacien, une non-linéarité et un terme en gradient

<u>Sofiane El-Hadi MIRI</u>

Laboratoire d'Analyse Non-Linéaire et Mathématiques Appliquées
Université de Tlemcen

mirisofiane@yahoo.fr

Résumé Nous considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u &= \pm|\nabla u|^\nu + f(x,u), \quad \text{dans } \Omega, \\ u &\geq 0 \ \text{ dans } \Omega, \\ u &= 0 \ \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega \subset I\!R^N$ est un domaine régulier borné, $p > 1$, $0 < \nu \leq p$ et f est une fonction positive. Le but de ce travail est de montrer -sous certaines hypothèses vérifiées par f- l'existence de solutions positives.

keywords : p-laplacien, solutions positives, terme en gradient

msc : 35D05, 35D10

Introduction Nous nous intéressons à la classe de problèmes quasilinéaires elliptiques de la forme :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \pm\left|\nabla u\right|^\nu + f\left(x,u\right) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

où $\Omega \subset I\!R^N$ est un domaine borné, $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p > 1$, est l'opérateur p-Laplacien et $0 < \nu \leq p$.

La fonction $f : \overline{\Omega} \times [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ est supposée être : Hölder continue croissante, et telle que

$$\text{la fonction } t \mapsto \frac{f\left(x,t\right)}{t^{p-1}} \text{ est croissante pour tout } x \in \overline{\Omega}, \tag{3}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f\left(x,t\right)}{t^{p-1}} = +\infty \text{ et } \lim_{t\to +\infty} \frac{f\left(x,t\right)}{t^{p-1}} = 0 \text{ uniformément pour } x \in \overline{\Omega}. \tag{4}$$

$$f\left(x,0\right) \neq 0 \tag{5}$$

On rappelle aussi la notion de solution entropique dans la définition suivante :

Définition 0.1. *Soit u une fonction mesurable. On dira que $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ si $T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$, où*

$$T_k(s) = \begin{cases} k\, sgn(s) & si \quad |s| \geq k, \\ s & si \quad |s| \leq k. \end{cases} \tag{6}$$

Soit $H \in L^1(\Omega)$. Alors $u \in \mathcal{T}_0^{1,p}(\Omega)$ est une solution entropique du problème

$$\begin{cases} -\Delta_p u = H \ \ dans\ \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \end{cases} \tag{7}$$

si pour tout $k > 0$ et tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on ait

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \langle \nabla u, \nabla (T_k(u-v)) \rangle = \int_\Omega H\, T_k(u-v). \tag{8}$$

Le terme en gradient comme terme absorbant
nous nous intéressons tout d'abord au problème suivant

$$\begin{cases} -\Delta_p u + |\nabla u|^\nu = f(x,u) & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{9}$$

Théorème 0.1. *Si les conditions sur f sont vérifiées. Si $0 < \nu \leq p$, alors le problème (9) possède au moins une solution entropique $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Le terme en gradient comme terme de réaction
nous nous intéressons à présent au problème suivant :

$$\begin{cases} -\Delta_p u = f(x,u) + |\nabla u|^\nu & \text{dans } \Omega, \\ u > 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{10}$$

avec $\nu < p - 1$.

nous avons alors le résultat d'existence suivant :

Théorème 0.2. *Sous les hypothèses émises sur f, le problème (10) possède au moins une solution entropique.*

Bibliographie

[1] Abdellaoui, Boumediene. "Multiplicity result for quasilinear elliptic problems with general growth in the gradient." *Advanced Nonlinear Studies*, 8 (2008), 289-302.

[2] Miri, Sofiane El-Hadi. "Quasilinear elliptic problems with general growth and nonlinear term having singular behavior." *Advanced Nonlinear Studies*, 12 (2012), 19-48.

[3] Miri, Sofiane El-Hadi. "Existence of solutions to quasilinear elliptic problems with nonlinearity and absorption-reaction gradient term." *Electronic Journal of Differential Equations*, 2014(32), 1-12.