Chapitre 1 Brefs Rappels sur les équations différentielle.

I. Equations différentielles dans $\mathbb{R}$

Soit l'équation

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = \dot{x} = f(x,t) \quad (1)$$

x est appelé variable d'Etat, et t variable temps.
et f définie sur un domaine $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

Théorème: (Cauchy-Lipschitz Local).

Si f et $\frac{\partial f}{\partial x}$ sont continues dans un domaine $D' \subseteq D$

alors $\forall (x_0, t_0) \in D'$; il existe $\varepsilon > 0$, tel que la solution $x(t)$ de l'équation (1) qui vérifie $x(t_0) = x_0$ est unique sur $]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[$.

de plus si f est de classe C^k alors x est de classe C^{k+1}.

Remarques:

- Si la fonction f est moins régulière il peut y avoir existence mais non unicité.
- Si f ne dépend pas de t l'équation (1) est dite autonome et dans ce cas la date initiale t_0 à laquelle la condition initiale n'a pas réellement d'importante.
- la courbe représentative de la solution d'une équation différentielle est appelée chronique ou courbe intégrale.

Définition: On appelle isocline de pente K ($K \in \mathbb{Z}$). l'ensemble des points du plan (t,x) où la trajectoire (solution) admet une tangente de pente égale à K. i.e.

$$\dot{x} = f(x,t) = K.$$

Point d'équilibre:

Remarque: on rappelle que pour une équation autonome nous avons: $\dot{x} = f(x)$

Si $x(t)$ est solution alors $y(t) = x(t+T)$ est aussi solution

$$\dot{y} = \dot{x}(t+T) = f(x(t+T))$$

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t+T) = f(x(t+T)) = f(y(t)).$$

Donc toutes les solutions des équations autonomes se déduisent les unes des autres par translation le long de l'axe du temps.

Définition: On appelle point d'équilibre; une solution constante $x^* = x(t)$ donc qui vérifie $\dot{x}^* = f(x^*) = 0$.

* Cas linéaire (trivial). $f(x) = \lambda x$. $\lambda \in \mathbb{R}$

le seul point d'équilibre est $x^* = 0$.

la solution de $\dot{x} = \lambda x$ est donnée par $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$.

- si $\lambda < 0$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{\lambda t} = 0$ quelle que soit la condition initiale x_0; on dit que le point d'équilibre est globalement asymptotiquement stable.

- Si $\lambda > 0$, alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = +\infty$; on dit que le point d'équilibre est instable.

- Si $\lambda = 0$ alors $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = x_0$; on dit que le point d'équilibre est neutralement stable, i.e qu'on ne s'éloigne ni on s'approche de x^* lorsque t tend vers l'∞.

* Cas non linéaire :

Soit x^* un point d'équilibre de l'équation $\dot{x} = f(x)$

L'étude de la stabilité locale de x^* a pour but de déterminer si partant d'une condition initiale "proche" "voisine" de x^* la trajectoire s'approche ou s'éloigne de x^* lorsque t augmente.

à cet effet on pose $u = x - x^*$

u est dite variable locale. u est supposée "petite" donc $\dot{u} = \dot{x} = f(x)$.

si l'on fait un developpement de Taylor de f on obtient au vois de x^*

$$f(x) = f(x_*) + (x - x_*) f'(x_*) + o(x - x^*).$$

Comme $f(x_*) = 0$ on aura $\dot{u} \approx \lambda^* (x - x^*) = \lambda^* u$. $\lambda^* = f'(x_*) = \frac{\partial f}{\partial x}$

On obtient ainsi une équation différentielle linéaire en u.

On dit que l'équation $\dot{x} = f(x)$ a été linéarisée au voisinage d'un point d'équilibre. et $u = u_0 e^{\lambda^* t}$

On distingue trois Cas:

- $\lambda^* < 0$ alors $\lim_{t \to +\infty} u(t) = 0$, donc $\lim_{t \to +\infty} x(t) = x^*(t) = x^*$

On dit que x^* est localement asymptotiquement stable.

- $\lambda^* > 0$ alors $\lim_{t \to +\infty} u(t) = +\infty$ Dans ce cas la trajectoire s'éloigne de x^*. on dit qu'il est instable.

- $\lambda^* = 0$. La linéarisation ne permet pas de Conclure ; on dit que x^* est non hyperbolique (dégénéré).

Dans ce cas la linéarisation ne permet pas de Conclure

<u>Exemple</u>: $\dot{x} = (x^2 - 4)(x - 3) = f(x)$

les points d'équilibre sont $x_1^* = -2$, $x_2^* = 2$, $x_3^* = 3$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 4$

$x_1^* = -2 \qquad f'(x_1^*) = 20 > 0 \qquad x_1^*$ est donc instable

$x_2^* = 2 \qquad f'(x_2^*) = -4 < 0 \qquad x_2^*$ ——— . ——— stable

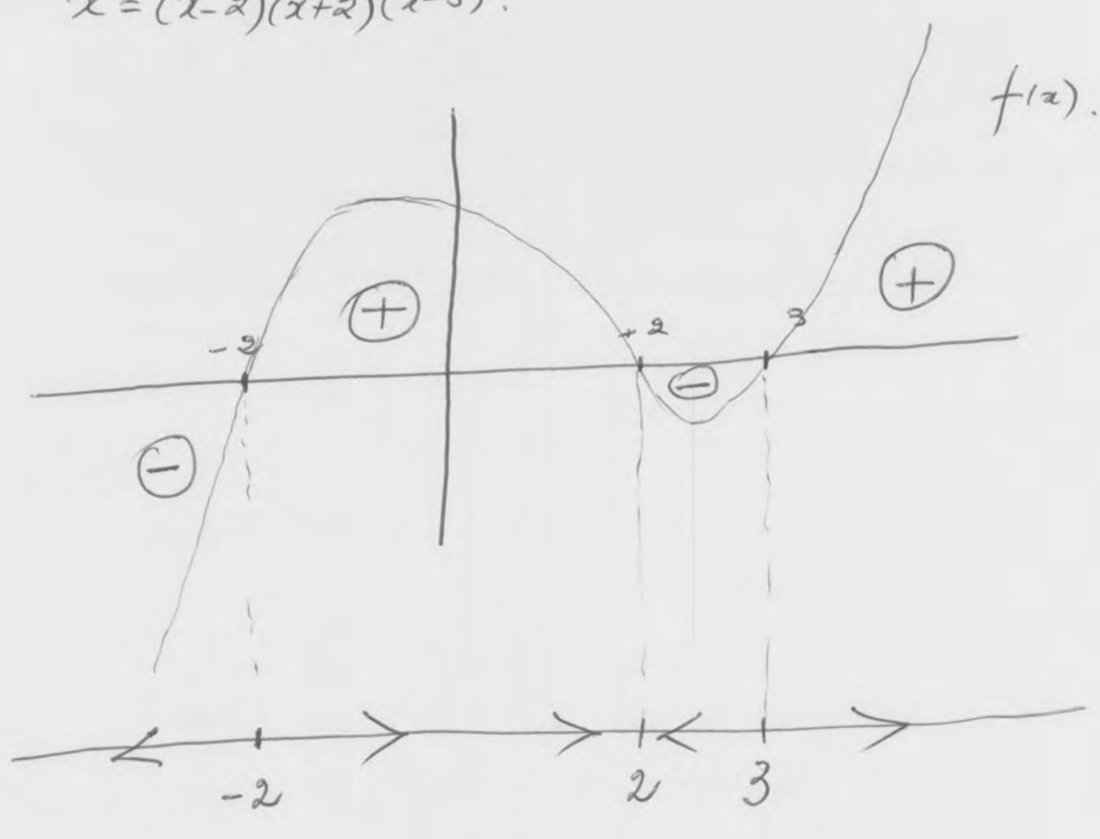
et $x_3^* = 3 \qquad f'(x_3^*) = 5 > 0 \qquad x_3^*$ ——— instable

• Portrait de phase – classes d'équivalence topologiques:

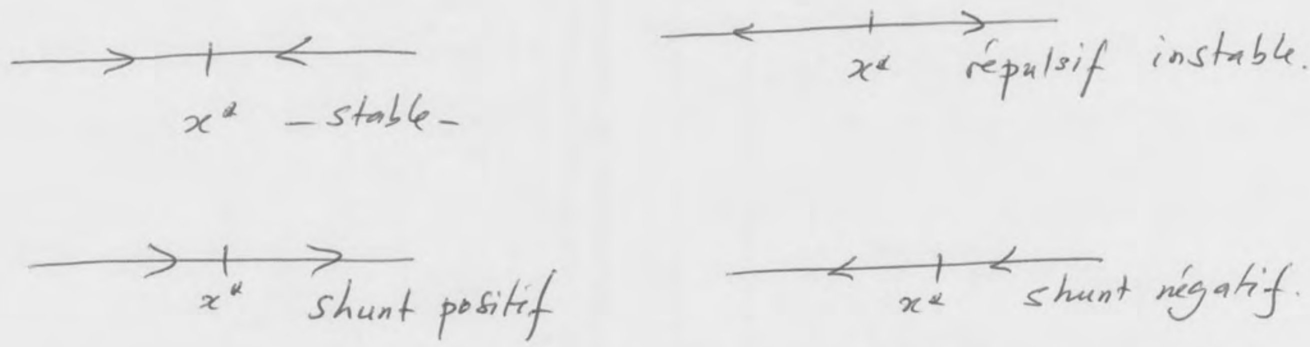
En dehors des points d'équilibre de $\dot{x} = f(x)$ la variable x est soit croissante soit décroissante $\dot{x} > 0$ ou $\dot{x} < 0$. le sens de la variation de x est représentée par une flèche orientée vers la droite si $\dot{x} > 0$ et vers la gauche sinon.

Cette représentation est appelée portrait de phase.

Exemple: $\dot{x} = (x-2)(x+2)(x-3)$.



En général il y'a quatre portraits de phase possibles pour un point d'équilibre



Définition: Deux équations différentielles de la forme $\dot{x} = f(x)$. sont qualitativement équivalentes (appartiennent à la même classe d'équivalence topologique). si elles ont le même nombre de points d'équilibre, de même nature et agencés dans le même ordre le long du portrait de phase.

II/ Système d'équations dans $\mathbb{R}^2$ (système planaire).

On considère à présent les systèmes du type :

$$(S) \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y). \end{cases}$$

système qui peut aussi être écrit sous la forme : $\dot{X} = \Phi(X)$

où $X = (x,y)$ et $\Phi(X) = (f(x,y), g(x,y))$.

Si Φ est de classe C^1 on récupère le même théorème que pour $\mathbb{R}$. existence unicité et régularité.

Par analogie avec les EDO dans $\mathbb{R}$, on appelle point d'équilibre de (S) une solution constante (x^*, y^*). telle que

$$\begin{cases} \dot{x}^* = f(x^*, y^*) = 0 \\ \dot{y}^* = f(x^*, y^*) = 0. \end{cases}$$

On appelle plan de phase le plan (x,y).

La représentation des trajectoires dans le plan de phase s'appelle portrait de phase.

Résolution des systèmes linéaires $\dot{X} = AX$.

- Exponentielle d'une matrice.

Définition: Soit A une matrice carrée donnée

l'exponentielle de A notée e^A est définie par:

$$\exp(A) = e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$$

avec $A^0 = I_n$. (la matrice identité).

Propriétés:

(i) Si A ~~et~~ B commutent alors $(AB = BA)$: $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

(ii) Si B est semblable à A $(B = P^{-1}AP)$ alors.

$$e^B = P^{-1} e^A P.$$

(iii) $\frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right) = A e^{tA} = e^{tA} \cdot A$

Cas particulier:

(i) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}$

(ii) $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}$

(iii) $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & te^{\lambda_0 t} \\ 0 & e^{\lambda_0 t} \end{pmatrix}$

(iv) $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \Rightarrow e^{At} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos\beta t & -\sin\beta t \\ \sin\beta t & \cos\beta t \end{pmatrix}$.

$$\left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right) = Ae^{tA}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{tA}\left(e^{hA} - I\right)}{h}.$$

$$e^{hA} - I = I + hA + \frac{(hA)^2}{2!} + \cdots$$

$$\frac{e^{hA} - I}{h} = A + \frac{hA^2}{2!} + \frac{h^2A^3}{3!} + \cdots \Rightarrow \lim_{h\to 0} \frac{(e^{hA} - I)}{h} e^{tA} = Ae^{tA}.$$

Méthode pratique de résolution:

On cherche à résoudre le système $\dot{X} = AX$ ($\det A \neq 0$).

pour X vérifiant la condition initiale $X(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

alors X est donnée par: $X = e^{tA}X(0)$.

En effet $\dot{X} = \frac{d}{dt}(X) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}X(0)\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)X(0) = Ae^{tA}X(0)$

$$\dot{X} = AX$$

La forme de la solution est donnée par $X = e^{tA}X(0)$.

Exemple: $\dot{X} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} X \longrightarrow \lambda_i = 3 \pm i$

$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$A = PJP^{-1}$

$$e^{Jt} = e^{3t}\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

$$e^{tA} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[e^{tJ} \right] \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e^{tA} = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix}.$$

$$X = e^{tA} X(0) = e^{3t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t + \sin t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}.$$

$$X = e^{3t} \begin{pmatrix} x_0 (\cos t - \sin t) + y_0 \sin t \\ -2x_0 \sin t + (\cos t + \sin t) y_0 \end{pmatrix}.$$

. Etude des systèmes linéaire.

Dans ce cas le système (S) s'écrit.

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases} \quad \text{ie} \quad \dot{X} = AX \qquad \text{avec } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

On supposera aussi que $\det A \neq 0$. (pt d'équilibre unique 0)

1er cas: A admet deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

A est diagonalisable $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

en posons le changement $PY = X$ $\quad (X = P^{-1}Y)$

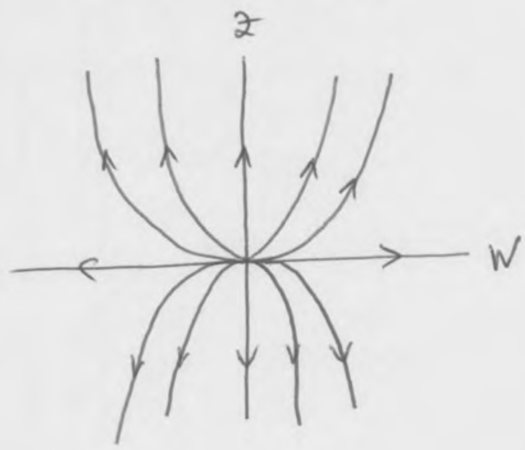
on obtient alors le système Canonique $\dot{Y} = JY$. $\qquad Y = (w, z)$.

$$\begin{cases} \dot{w} = \lambda_1 w \\ \dot{z} = \lambda_2 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = c_1 e^{\lambda_1 t} \\ z = c_2 e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

* Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$. alors $\lim_{t \to +\infty} w(t) = \lim_{t \to +\infty} z(t) = +\infty$.

et le portrait de phase dans le plan est:

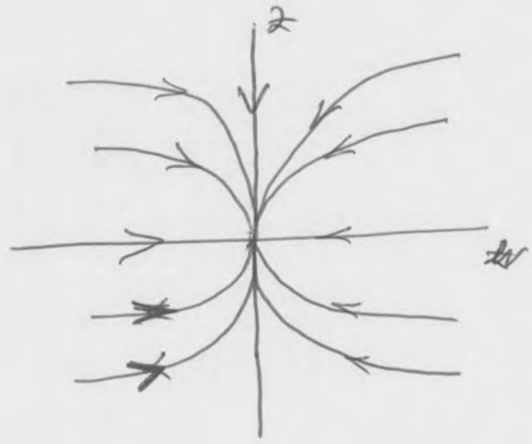
$z = c_2\left(e^{\lambda_1 t}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} = c_2\left(\frac{w}{c_1}\right)^{\alpha}$



l'origine est un noeud instable.

* Si λ_1 et λ_2 négatives alors $\lim_{t \to +\infty} w(t) = \lim_{t \to +\infty} z(t) = 0$.

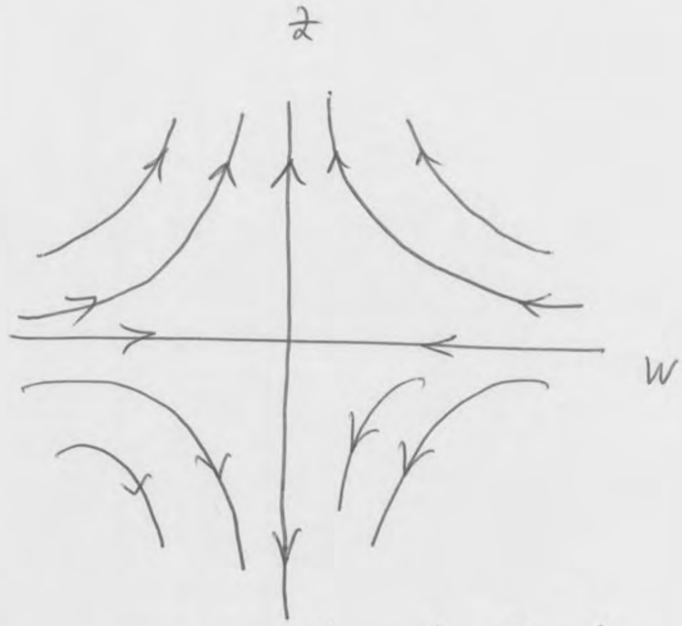
l'origine est un noeud stable.



* si $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ $\quad \lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0$. $\lim_{t \to +\infty} w(t) = 0$

et $\lim_{t \to +\infty} z(t) = +\infty$.

l'origine est appelé point selle.



2ème cas : A admet une valeur propre double. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$.

- Si A est diagonalisable $P^{-1}AP = J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$.

En posant $X = PY$ $(Y = P^{-1}X)$. on obtient alors le système

Canonique $\dot{Y} = JY$ $\quad Y = (w, z)$ $\quad \begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = c_1 e^{\lambda_0 t} \\ z = c_2 e^{\lambda_0 t} \end{cases}$

$\left\{ z = \frac{c_2}{c_1} w \right\}$

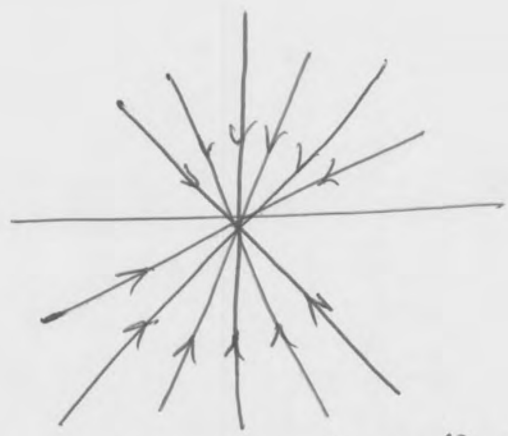
* Si $\lambda_0 > 0$ alors $\lim_{t \to +\infty} w(t) = \lim_{t \to +\infty} z(t) = +\infty$.

On obtient alors le portrait de phase suivant:

Etoile instable

• Si $\lambda_0 < 0$ $\lim\limits_{t \to +\infty} w(t) = \lim\limits_{t \to +\infty} z(t) = 0$, on obtient alors une

étoile stable



• Si A n'est pas diagonalisable le système canonique devient

$$\dot{Y} = JY \quad \text{avec} \quad J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \dot{w} = \lambda_0 w + z \\ \dot{z} = \lambda_0 z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w = (C_1 + C_2 t) e^{\lambda_0 t} \\ z = C_2 e^{\lambda_0 t} \longrightarrow \left(t = \log\left(\frac{z}{C_2}\right)^{\frac{1}{\lambda_0}} \right) \end{cases}$$

• Si $\lambda_0 > 0$ $\lim\limits_{t \to +\infty} w = \lim\limits_{t \to +\infty} z = +\infty$ le protrait de phase

est : $x = 0$ est un noeud dégénéré instable

• Si $\lambda_0 < 0$ alors $\lim_{t \to +\infty} w(t) = \lim_{t \to +\infty} z(t) = 0$.

$x^* = 0$ est un noeud dégénéré asymptotiquement stable.

Deux valeurs complexes conjuguées : $\lambda_{1,2} = \alpha + i\beta$.

$$J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

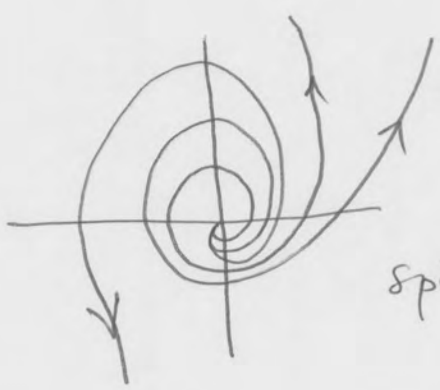
$$\begin{cases} \dot{w} = \alpha w - \beta z \\ \dot{z} = \alpha w + \beta z \end{cases}$$

(pour résoudre le système on passe en coordonnées polaires. $w = r\cos\theta$
$z = r\sin\theta$.

On obtient que $\begin{cases} \dot{r} = \alpha r \\ \dot{\theta} = \beta \end{cases}$ ie $\begin{cases} r(t) = r_0 e^{\alpha t} \\ \theta(t) = \beta t + \theta_0 \end{cases}$

Si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

$x^* = 0$ foyer instable



Spirale répulsive

• Si $\alpha = 0$ et $\beta > 0$. $x = 0$ est un centre.

$x^* = 0$ Stabilité neutre

(neutralement stable).

• Si $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. $x = 0$ est un foyer stable

foyer stable

$2^{\text{ème}}$ approche : l'étude des portraits de phase s'est faite suite à l'étude des valeurs propres. Observons que : si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - tr(A).\lambda + \det(A).$$

La nature des valeurs propres dépend du signe du discriminant

$$\Delta = (\underbrace{tr(A)}_{x})^2 - 4\underbrace{\det(A)}_{y}.$$

Dans le plan $(tr(A), \det(A))$, l'équation $\Delta = 0$ est celle de la parabole $\det A = \frac{1}{4}(tr(A))^2$

Cette parabole divise le plan en deux grandes régions :

au dessus de la parabole $(\Delta < 0)$. (foyers et centres).

en dessous $(\Delta > 0)$ (on trouve les noeuds et les points selles).

- Cas $\Delta = 0$ on est sur la parabole

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \qquad \det(A) = \lambda_0^2 > 0 \text{ et } tr(A) = 2\lambda_0.$$

$\lambda_0 > 0$ on a une étoile ou un noeud dégénéré instable
$(tr(A) > 0)$

$\begin{pmatrix} \lambda_0 < 0 \\ tr(A) < 0 \end{pmatrix}$ on a une étoile ou un noeud dégénéré stable

Cas $\Delta > 0$ on est dans la région sous la parabole.

- $\det A < 0$ $(\lambda_1\lambda_2 < 0)$ λ_1 et λ_2 sont de signes opposés, l'origine est un point selle.
- $\det A > 0$ ~~et~~ $tr(A) > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ l'origine est un noeud instable
- $\det A > 0$ et $tr(A) < 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ l'origine est un noeud stable

Classes d'équivalence topologique

Définition 1:

Deux systèmes planaires linéaires $\dot{X} = AX$ et $\dot{X} = BX$ sont dits topologiquement équivalents s'il existe une fonction h de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ continue et possédant une fonction réciproque continue (homéomorphisme).
qui transforme de manière bijective les trajectoires du système $\dot{X} = AX$ en celle du système $\dot{X} = BX$
(en préservant le sens des variations du temps).

Définition 2:

Le point d'équilibre du système $\dot{X} = AX$ est dit hyperbolique si les valeurs propres de A ont toutes une partie réelle non-nulles. dans le cas contraire le point d'équilibre est dit non-hyperbolique

Théorème:

Si la matrice A possède des valeurs propres à partie réelle non-nulle, alors le système linéaire $\dot{x} = AX$. est topologiquement équivalent au système $\dot{x} = Bx$ où B est représentée par l'un des exemples suivants:

(i) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (deux valeurs propres négatives $\longrightarrow$ (noeuds, foyers étoiles stables)

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (deux valeurs propres positives $\longrightarrow$ Noeuds foyers étoiles instables).

(iii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ une valeurs propre positive et une négative $\rightarrow$ Points selles.

Si A possède des valeur propres (réelles) à partie réelle nulle alors le système linéaire $\dot{x} = AX$ est topologiquement au système $\dot{x} = Bx$ où B est représentée par l'un des exemples:

(i) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ infinité de points d'équilibre

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ une valeur propre nulle et l'autre réelle positive. (crêtes)

(iii) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ——— " ——— ——— négative (vallées).

(iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ deux valeurs propres nulles. (flux)

(v) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ deux valeurs propres imaginaires pures (centres).

· <u>Cas $\Delta<0$</u> On est dans la région au-dessus de la parabole

$\det A = (\alpha+i\beta)(\alpha-i\beta) = \alpha^2+\beta^2 > 0$, $\det(A) > 0$.

· $tr(A) < 0$ La partie réelle des valeurs propres est négative

l'origine est un foyer stable

· $tr(A) > 0$ La partie réelle des valeurs propres est positive,

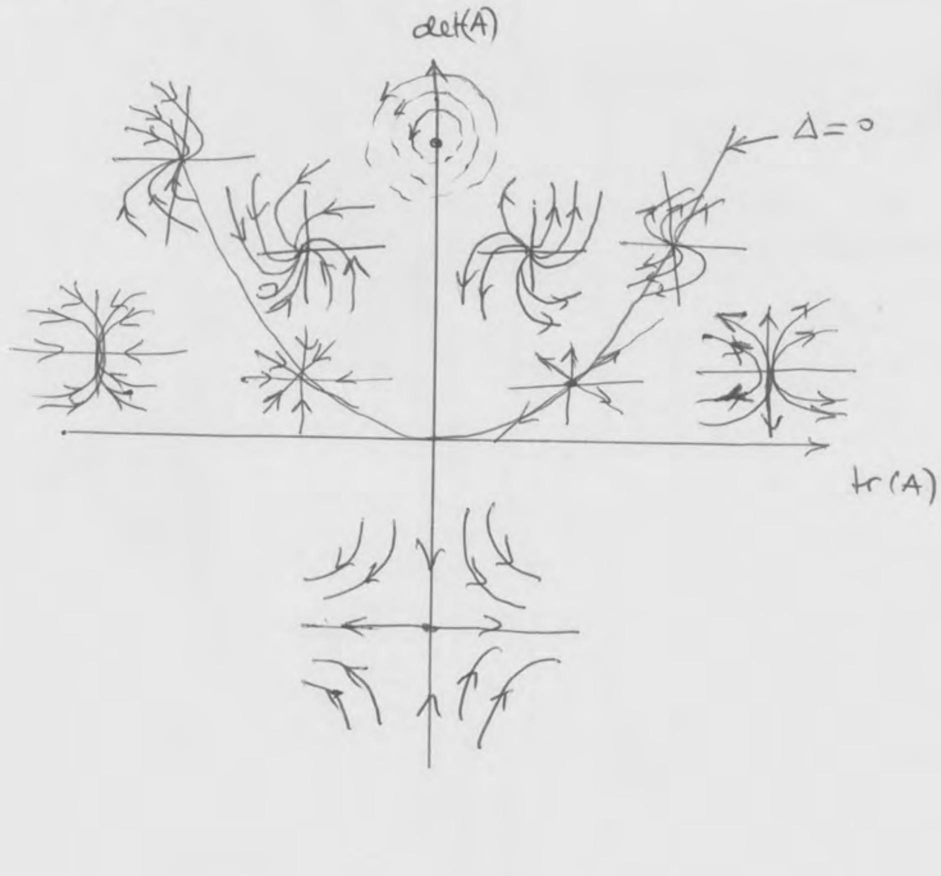
l'origine est un foyer instable

· $tr(A) = 0$ la partie réelle des valeurs propres est nulle

l'origine est un centre.

<u>En résumé</u> : On a stabilité si $\begin{cases} \det A > 0 \\ tr(A) < 0. \end{cases}$

(Si $\begin{cases} \det A > 0 \\ tr(A) = 0 \end{cases}$ l'origine est un centre).



III/ Etude des systèmes dynamiques non linéaires

On considère à présent les systèmes non linéaires du type : $\dot{X} = \Phi(X) \quad X \in S \subset \mathbb{R}^2$. $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

où Φ est une fonction de classe C^1.

linéarisation au voisinage d'un point d'équilibre :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$ admettant un point d'équilibre $(x^*; y^*)$.

$$\begin{cases} f(x^*; y^*) = 0 \\ g(x^*; y^*) = 0 \end{cases}$$

On introduit les variables locales : $\begin{cases} u(t) = x - x^* \\ v(t) = y - y^* \end{cases}$

On se place dans un voisinage de $(x^*; y^*)$ et on fait un développement en série de Taylor de f et g

$$\begin{cases} \dot{u} = \dot{x} = f(x^*; y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_*, y_*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*; y^*)(y - y^*) + o(\|x\|) \\ \dot{v} = \dot{y} = g(x^*; y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_*, y_*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*; y^*)(y - y^*) + o(\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{\partial f}{\partial x}(x^*; y^*)(x - x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*; y^*)(y - y^*) \\ \dot{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*; y^*)(x - x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*; y^*)(y - y^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{u} = a_{11} u + a_{12} v \\ \dot{v} = a_{21} u + a_{22} v \end{cases} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*; y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*; y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*; y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*; y^*) \end{pmatrix}$$

$$\dot{u} = A^* u.$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$$ est appelée matrice Jacobienne.

On obtient ainsi un système linéaire qui approxime le système de départ localement au voisinage d'1 pt d'équilibre (x^*, y^*).

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = \cos x. \end{cases}$$

point d'équilibre $\underline{x = y}$ (première bissectrice).

$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

$(x^*, y^*) = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $k \in \mathbb{Z}$ sont les pts d'équilibres.

la matrice Jacobienne s'écrit : $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sin x & 0 \end{pmatrix}$.

- $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi) & 0 \end{pmatrix}$.
  - si k pair $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A < 0 \Rightarrow$ pt selle.

$$\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = -u. \end{cases} \quad k \text{ pair.}$$

  - si k impair $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} tr = 1 > 0 \\ \det = 1 > \\ \Delta = -3 < 0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$ foyer instable

$$\begin{cases} \dot{u} = u - v \\ \dot{v} = u. \end{cases}$$

Théorème de linéarisation:

Soit le système $\dot{x} = \Phi(x)$ admettant un point d'équilibre (x^*, y^*) et tel que $\det A^* \neq 0$, où A^* est la matrice Jacobienne associée au système au point (x^*, y^*). Alors dans un voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système $\dot{x} = \Phi(x)$ et de sa forme linéarisée $\dot{U} = \hat{A}U$. sont qualitativement équivalent sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.

(On dit que les noeuds foyers, point selle sont structurellement stables) par contre les centres ne le sont en général pas. (voir T.D).

Portrait de phase: $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$

- On définit les isoclines (nulle) verticale comme le lieu des points du protrait de phase tel que la direction de la vitesse est strictement verticale ie $\vec{v}.(0, \dot{y})$
  les isocline verticales sont les courbes $\dot{x} = f(x,y) = 0$
- On définit les isoclines (nulls) horizontales comme le lieu des points du portrait de phase tel que la direction de la vitesse est strictement horizontale ie $\vec{v}(\dot{x}, 0)$ se sont les courbes $\dot{y} = g(x,y) = 0$.

un point d'équilibre se trouve à l'intersection des Isoclines verticales et horizontales.

<u>Dessiner</u> un <u>portrait</u> de <u>phase</u> :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$

Il est clair que la trajectoire passant par un point (x_0, y_0) y est tangente au vecteur vitesse $(f(x_0,y_0), g(x_0,y_0))$ l'étude de ce champ de vecteurs qui sera notre outil pour esquisser le plan de phase.

On commencera par chercher les isoclines (point où $f(x,y)=0$ et $g(x,y)=0$) ; on examinera ensuite le signe de $\dot{x}$ et $\dot{y}$ ($f(x,y)$ et $g(x,y)$) $\dot{y}>0 \uparrow$, $\dot{y}<0 \downarrow$

$\dot{x}>0 \longrightarrow$, $\dot{x}<0 \longleftarrow$

<u>Exemple</u> :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x + 2 \\ \dot{y} = x^2 - y. \end{cases}$$