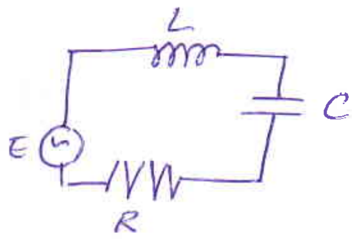
Chapitre VI — Résolution d'équations différentielles

I. Introduction :

Les équation differentielles apparaissent dans plusieurs domaines et modélisent different phénomènes, Comme par exemple :

- en éléctricité : Considérons un circuit RLC constitué

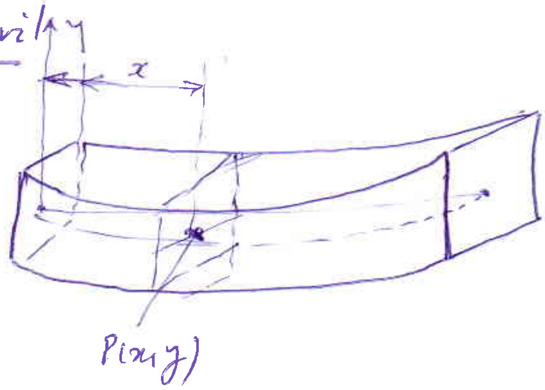


d'une résistence R, d'une bobine d'inductence L d'un Condensateur de Capacité C et d'un générateur de force éléctromotrice $E(t)$.

alors l'intensité $i(t)$ du courant vérifie

$$L\, i''(t) + R\, i'(t) + \frac{1}{C}\, i(t) = E'(t).$$

- en Génie-Civil



flexion d'une poutre.

La déformation verticale y vérifie l'équation:

$$E I \, y''(x) = M$$

où: $E \equiv$ module d'élasticité de la poutre.

$I \equiv$ Moment d'inertie de la section transversale

$M \equiv$ Moment de flexion.

<u>Définition</u>: On appelle problème de Cauchy tout problème du type:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (I).$$

où $f : [x_0, x_0+T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$y(x_0) = y_0$ est appelé condition initiale.

<u>Exemple</u>: $\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ $\qquad f(x,y) = y + x$, $\quad x_0 = 0$, $y_0 = 1$.

on peut le résoudre par des méthodes classiques.

$$y' - y = x \iff e^{-x} y' - e^{-x} y = x e^{-x}$$

$$\iff \left(e^{-x} y\right)' = x e^{-x}$$

$$\iff e^{-x} y = \int x e^{-x} dx$$

$$\iff e^{-x} y = -x e^{-x} - e^{-x} + C \qquad (C \in \mathbb{R})$$

Donc $y(x) = -x - 1 + Ce^{x}$

Comme $y(0) = 1 \Rightarrow 1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$

la solution du problème est $\boxed{y(x) = -x - 1 + 2e^{x}}$

Théorème : Considérons le problème de Cauchy (I).

si $\forall x \in [x_0, x_0+T]$ et $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ on a :

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L\,|y_1 - y_2|$ alors le problème

(I) possède une solution unique $\forall y_0 \in \mathbb{R}$.

Par la suite on supposera toujours que les problèmes étudiés possèdent une solution unique.

Le but de ce chapitre est de donner des méthodes numériques qui permettent d'approximer la solution y en certains points $x_i \in [x_0, x_0+T]$.

II Méthodes à un pas :

On considère le problème $\begin{cases} y'(x) = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ sur $[x_0, x_0+T]$

Etant donné une subdivision $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = x_0 + T$

tq $x_{i+1} = x_i + h$ $\quad h = \frac{T}{n}$.

on cherche à déterminer des valeurs approchées $y_0, y_1, \ldots, y_n$ des valeurs $y(x_i)$ prises par la solution exacte y.

On appelle méthode à un pas une méthode permettant de calculer y_{i+1} à partir de la seule valeur antérieure y_i.

1- Méthode d'Euler :

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (I)$$

$y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ $\quad y_0$ connue.

Soit $y(x)$ la solution exacte de (I) ; approximons y' par

$$y'(x_0) \approx \frac{y(x_0+h) - y(x_0)}{h} = \frac{y(x_1) - y(x_0)}{h} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Donc $\quad y_1 = y_0 + h\,y'(x_0) = y_0 + h\, f(x_0, y_0)$

Sur l'intervalle $[x_1, x_2]$ on refait le même calcul et on obtient $y_2 = y_1 + h f(x_1, y_1)$

ainsi de suite, on obtient alors l'algorithme d'Euler :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \\ x_{i+1} = x_i + h. \end{cases} \quad 0 \leq i \leq n-1. \quad (x_0, y_0) \text{ donné.}$$

<u>Exemple</u> : Soit le problème de Cauchy.

$$\begin{cases} y' = y + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

on veut approximer la solution de (1) en $x = 1$ à l'aide de la méthode d'Euler en prenant

$h = 0,1.$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases} \qquad f(x, y) = y + x \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1.$$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h(y_i + x_i) \\ x_{i+1} = x_i + h \end{cases} \iff \begin{cases} y_{i+1} = 1,1\, y_i + 0,1\, x_i \\ x_{i+1} = x_i + 0,1. \end{cases}$$

i	0	1	2	3	4	...	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	...	1,0
y_i	1	1,1	1,22	1,362	1,5282	...	3,1874

On a alors l'approximation.

$$y_{10} \approx y(1) \quad \text{ie} \quad y(1) \simeq 3,187$$

or la solution exacte est donnée par:

$$y(x) = -x-1+2e^{x} \quad \text{i.e} \quad y(1) = 3,437.$$

$$y(0,4) = 1,583$$

<u>Estimation de l'erreur</u>:

l'erreur de la méthode d'Euler est de l'ordre de h

i.e $O(h)$ soit:

$$|y_i - y(x_i)| \leq C h \qquad C \in \mathbb{R}.$$

2. Méthode de Taylor d'ordre 2 :

Soit le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$.

Supposons que f est de classe C^1 alors y est de classe C^2. On peut alors faire un développement de Taylor d'ordre 2 :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i) + h\,y'(x_i) + \frac{h^2}{2!}y''(x_i) + o(h^2).$$

or $y'(x_i) = f(x_i, y_i)$.

$$y''(x_i) = \frac{d}{dx}\left(y'(x)\right)\Big|_{x=x_i} = \frac{d}{dx} f(x, y(x))\Big|_{x=x_i}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x=x_i} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=x_i}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\cdot y'(x_i, y_i).$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\, f(x_i, y_i).$$

En remplaçant dans la formule de Taylor on obtient :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i+h) = y(x_i) + h\,f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\, f(x_i, y_i)\right] + o(h^2).$$

En négligeant $o(h^2)$ on obtient

l'algorithme de Taylor d'ordre 2

$$(T_2) \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t_i, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i)\right] \\ x_{i+1} = x_i + h. \end{cases}$$

<u>Estimation de l'erreur</u>

La méthode de Taylors d'ordre 2 est du second ordre i.e l'erreur commise est de l'ordre de h^2.

$$|y_i - y(x_i)| \leq C h^2.$$

c'est donc une méthode plus précise que la méthode de <u>Euler</u>. mais on a émis l'hypothèse f de classe C^2.

<u>Remarque</u>: On peut obtenir des méthodes de Taylor d'ordre supérieur en allant plus loin dans le développement de Taylor.

3. Méthodes de Runge-Kutta:

On considère toujours le Pb de Cauchy $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

reprenons l'algorithme de Taylor d'ordre 2 sus-cité.

$$(T_2): \begin{cases} y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\cancel{t_i}, y_i) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\, f(x_i, y_i)\right] \\ x_{i+1} = x_i + h. \end{cases}$$

réécrivons la première équation de la manière suivante:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i) + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial x}(t_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i)\, f(x_i, y_i)\right]$$

Or le Développement de Taylor (pour fonction à 2 variables donne)

$$f(x_i + h, y_i + h f(x_i, y_i)) = f(x_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + h \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \cdot f(x_i, y_i) + o(h)$$

On obtient ainsi l'algorithme de Runge Kutta d'ordre 2 $(R\text{-}K)2$

$$(R\text{-}K)_2 : \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h. \\ k_{i,1} = k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_{i2} = k_2 = f(x_{i+1}, y_i + h k_1). \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1 + h k_2) \end{cases}$$

Exemple : Soit le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - \dfrac{2x}{y} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

en prenant $h = 0,2$ donner une approximation de $y(0,2)$ en utilisant la méthode de Runge-Kutta d'ordre 2.

l'algorithme : $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x,y) = y - \dfrac{2x}{y}$.

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0,2 = 0,2 \\ k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1 \\ k_2 = f(x_1, y_0 + hk_1) = f(0,2\ ,\ 1+0,2\times 1) = f(0,2\ ,\ 1,2) \\ \qquad = 0,86667 \end{cases}$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + hk_2) = 1 + (1 + 0,2 \times 0,86667) = 1,18667$$

Précision et estimation de l'erreur

La méthode de Runge Kutta est d'ordre 2 ie $(R\text{-}K)_2$

$$|y_i - y(x_i)| \leq ch^2.$$

Exemple : la solution exacte est $y = \sqrt{2x+1}$

$$y(0,2) = \sqrt{1,4} = 1,183216.$$

On peut aussi définir la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Comme suit:

$$(R\text{-}K)_4 \quad \begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_1) \\ k_3 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} k_2) \\ k_4 = f(x_{i+1}, y_i + h k_3) \\ y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \end{cases}$$

Cette méthode est d'ordre 4 i.e $|y_i - y(x_i)| \leq c h^4$.

Ex

Si on applique cette méthode à notre exemple:

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + h = 0 + 0,2 = 0,2 \\ k_1 = f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 1 \\ k_2 = f(x_0 + 0,1, y_0 + 0,1 \times 1) = f(0,1, 1,1) = 0,918182 \\ k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2} k_2) = f(0,1, 1,091818) = 0,908637 \end{cases}$$

$$k_4 = f(0,2 \quad , \quad 1,181727) = 0,843239$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1,183229$$

$$y(0,2) \simeq y_1 = 1,183229.$$