Chapitre VI

Dérivation numérique.

· Introduction: Il arrive que l'on ne connaisse une fonction f qu'en certain points et que l'on ait besoin d'évaluer f' en certains points dans ce cas on fait appel à la dérivation numérique.

· Différences finies: 1- Dérivée

Si f est une fonction suffisament régulière sur un intervalle $[a,b]$; pour h assez "petit" le developpement de Taylor à l'ordre 2 de f au vois de x donne:

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi) \qquad \xi \in (x, x+h).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - \frac{h}{2!} f''(\xi).$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + O(h).$$

pour h assez petit; on néglige $O(h)$ et l'on a l'approximation

$$\boxed{f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

(~~sous~~ entendu que $f(x)$ et $f(x+h)$ ~~sont~~ connus)

Problème : Soit le tableau suivant de données (issues de mesures pratiques)

x	$0{,}399$	$0{,}401$
$f(x)$	$0{,}409671$	$0{,}411834$

Estimer $f'(0{,}4)$?

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(\xi_1) \qquad \xi_1 \in (x, x+h).$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi_2) \qquad \xi_2 \in (x-h, x).$$

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{h^2}{2}\left(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right)$$

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + \frac{h}{4}\left(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right)$$

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

et on commet l'erreur

$$\frac{h}{4}\left(f''(\xi_1) - f''(\xi_2)\right) = o(h)$$

f'' bornée.

$$f'(0{,}4) \simeq \frac{f(0{,}4+h) - f(0{,}4-h)}{2h} \qquad \text{pour } h = 0{,}001$$

$$f'(0{,}4) \simeq \frac{f(0{,}401) - f(0{,}399)}{0{,}002} \simeq 1{,}082.$$

2 Dérivée seconde :

On veut à présent approximer $f''(x)$ en un point donné, f n'étant connue qu'en certain points.

Le Developpement de Taylor donne :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x).h + \frac{f''(x)}{2} h^2 + \frac{f'''(\xi_1)}{3!} h^3 \qquad \xi_1 \in (x, x+h)$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x) h + \frac{f''(x)}{2} h^2 - \frac{f'''(\xi_2)}{3!} h^3 \qquad \xi_2 \in (x-h, x).$$

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{h^3}{3!}\left(f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)\right).$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} + \frac{h}{6}\left(f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)\right).$$

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h).$$

pour h assez petit on néglige $O(h)$.

$$\boxed{f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}}$$

Rq il faudrait que f soit connue aux points $(x+h)$ x et $(x-h)$

Exemple.

Soit la table suivante issue de mesures pratiques.

x	0,398	0,399	0,4	0,401
$f(x)$	0,408591	0,409671	0,410732	0,411834

Donner une approximation de $f''(0,4)$ pour un pas $h = 0,001$

$$f''(x) \simeq \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x+h)}{h^2} = \frac{f(0,401) - 2f(0,4) + f(0,401)}{(0,001)^2}$$

$$\simeq 1.$$

Autre méthode: Soit à calculer $f'(x)$.

Supposons que l'on connaisse une approximation de f

notée $\tilde{f}$. nous avons alors:

$$f(x) = \tilde{f}(x) + E(x) \Longrightarrow f'(x) = \tilde{f}'(x) + E'(x)$$

on peut écrire alors:

$$f(x) \simeq \tilde{f}(x) \Longrightarrow f'(x) \simeq \tilde{f}'(x)$$

mais il faut alors analyser l'erreur $E'(x)$.

Application : Polynôme d'interpolation.

Soit f une fonction régulière, passant par les points supposés connus $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$ $\quad (y_i = f(x_i))$.

On peut alors construire le polynôme d'interpolation $P_n(x)$ aux points (x_i, y_i)

$$f(x) = P_n(x) + E(x) \qquad E(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

On peut déduire l'approximation

$$f'(x) \simeq P_n'(x) \quad \text{avec une erreur} \quad E'(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \left(\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right)'$$

Rq : Si l'on cherche à approximer $f'(x_j)$ $\quad x_j$ point d'inter

$$\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) = (x - x_0) \cdots (x - x_j)(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)$$

$$= (x - x_j) \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i)$$

donc $$\left(\prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right)' = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i) + (x - x_j) \left(\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i) \right)'$$

donc $$E'(x_j) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^{n} (x - x_i).$$