Chapitre V Intégration numérique

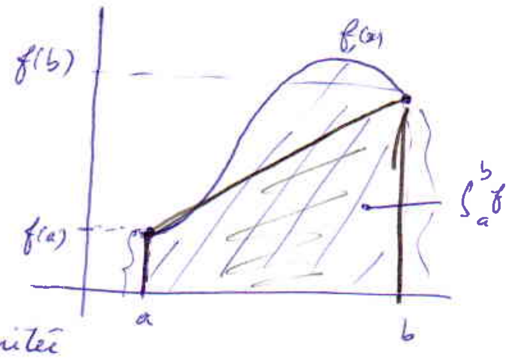
Introduction : On sait (par les méthode d'analyse classique) que si f est une fonction continue sur $[a,b]$ alors elle admet une primitive $F(x)$ et l'on a $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Seulement il arrive que l'on connaisse pas l'expression de f et même lorsque f est connue il arrive que l'on ne connaisse pas sa primitive. comme c'est le cas pour

$\int e^{-x^2} dx$, $\int \frac{e^x}{x}$, $\int \frac{\sin x}{x}$, ...

I. Formule des trapèzes.

1- Formule des trapèzes simple



Notre but est d'approximer $\int_a^b f(x)\,dx$,

$\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la partie de $\mathbb{R}^2$ limitée par les droites $x=a$, $x=b$ et $y=0$ et la courbe $y=f(x)$

si a est proche de b on approxime $\int_a^b f(x)\,dx$ par l'aire du trapèze de bases $f(a)$, $f(b)$ et de hauteur $(b-a)$ et l'on a

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a)+f(b)\right) \quad \text{(formule des trapèzes simple)}$$

2- Formule des trapèzes composées :

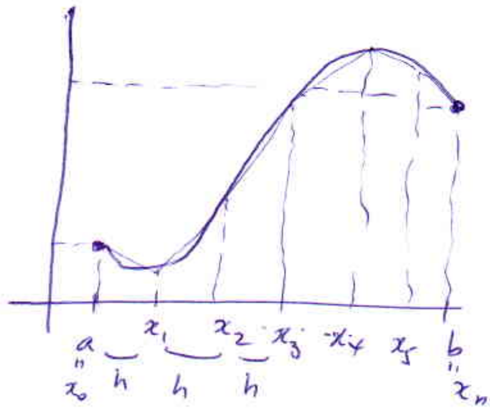
Soit à approximer $\int_a^b f(x)\,dx$ mais b n'est plus proche de a

dans ce cas on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles

$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ tq $x_{i+1} = x_i + h$ les intervalles

$[x_i, x_{i+1}]$ sont tous de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$.

et dans chaque sous intervalle on applique la formule des trapèzes simples :



$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx.$$

$$\simeq \frac{\overbrace{x_1 - x_0}^{h}}{2}\Big(f(x_1) + f(x_0)\Big) + \frac{\overbrace{x_2 - x_1}^{h}}{2}\Big(f(x_2) + f(x_1)\Big) + \cdots + \frac{\overbrace{x_n - x_{n-1}}^{h}}{2}\Big(f(x_{n-1}) + f(x_n)\Big)$$

$$= \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_n) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\big)\Big)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}\Big(f(x_0) + f(x_n) + 2\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\big)\Big)}$$ formule des trapèzes composées

Exemple: Approximer l'intégrale $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ par la méthode des trapèzes composée avec $n=2$.

$n = 2$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{2}{2} = 1$ $\quad x_0 = a = 0$, $x_1 = x_0 + h = 1$, $x_2 = x_1 + h = 2$

$f(x_0) = 1$, $f(1) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{5}$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{5} + 2\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\frac{11}{5}\right] = \frac{11}{10} = 1{,}1$$

le résultat exact est donné par : $\operatorname{arctg} 2 = 1,107149$.

<u>Théorème</u> : Soit f une fonction 2 fois dérivable sur $[a,b]$ tq f'' est continue sur $[a,b]$; et soit T la valeur de l'approximation de $I = \int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode des trapèzes composée, alors $\exists\, \xi \in [a,b]$ tq

$$E = I - T = -\frac{(b-a)\,h^2}{12} f''(\xi)$$
$$= -\frac{(b-a)^3}{12\,n^2} f''(\xi)$$
$$= -\frac{n\,h^3}{12} f''(\xi).$$

<u>Remarque</u> : On notera que l'on surestime ou sousestime I suivant que f soit convexe ou concave.

II/ Méthode de Newton-Côtes

Etant données les points $x_0, x_1, \dots, x_n$ $(x_{i+1} = x_i + h)$ $(x_0 = a,\ x_n = b)$ $h = \frac{b-a}{n}$ et soit $P_m(x)$ un polynôme de degré $\leq n$

On cherche à trouver $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tq $\forall P_m$

$$\int_a^b P_m(x)\,dx = \alpha_0 P_m(x_0) + \alpha_1 P_m(x_1) + \dots + \alpha_n P_m(x_n)$$

Une fois les α_i trouvés on pose :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f(x_i)}$$

La dernière formule s'appelle formule de Newton-Cotes

Rq on prend $P_m = 1, x, x^2, \dots, x^m, \dots, x^n$.

Exemple : Donner la formule de Newton Côtes pour $n=1$, $n=2$.

- $n=1$ $\qquad x_0 = a, \quad x_1 = b$.

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \alpha_0 f(a) + \alpha_1 f(b) \qquad \text{trouver } \alpha_0 \text{ et } \alpha_1.$$

$P_m(x) = 1, \qquad P_m(x) = x$

$$\int_a^b 1\,dx = \alpha_0 + \alpha_1 \implies \alpha_0 + \alpha_1 = b-a.$$

$$\int_a^b x\,dx = \alpha_0 a + \alpha_1 b \Rightarrow \alpha_0 a + \alpha_1 b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_0 = \alpha_1 = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{2}\left(f(a) + f(b)\right) \qquad \text{formule des trapèzes.}$$

- $n=2$ $\qquad x_0 = a, \quad x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = b, \quad h = \frac{b-a}{2}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \alpha_0 f(x_0) + \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

$P_m(x) = 1, \quad x, \quad x^2.$

$$\int_a^b 1\,dx = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = b-a$$

$$\int_a^b x\,dx = \alpha_0 a + \alpha_1 \frac{a+b}{2} + \alpha_2 b = \frac{b^2-a^2}{2}$$

$$\int_a^b x^2\,dx = \alpha_0 a^2 + \alpha_1 \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \alpha_2 b^2 = \frac{b^3-a^3}{3}$$

$$\alpha_0 = \frac{b-a}{6}, \qquad \alpha_1 = 4\,\frac{b-a}{6}, \qquad \alpha_2 = \frac{b-a}{6}$$

Donc

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right).}$$

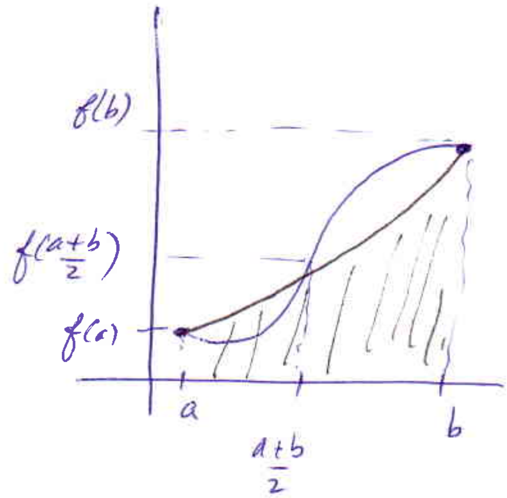
La Dernière formule s'appelle formule de Simpson simple.

III/ Méthode de Simpson:

1. Méthode de Simpson simple:

Comme on l'a vu la méthode de Simpson simple est donnée par $\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$ pour $n=2$ Dans la méthode de Newton-Cotes.

En fait si on approxime l'aire $\int_a^b f(x)dx$ par l'aire délimitée par les droite $x=a$, $x=b$ et $y=0$ la courbe de la parabole $y=\alpha x^2+\beta x+\gamma$ passant par $x_0=a$, $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=b$ on obtient cette même formule.



2. Méthode de Simpson Composée:

Comme pour la méthode des trapèzes composée on subdivise $[a,b]$ en n sous intervalles $[x_i, x_{i+1}]$ de même longueur $h=\frac{b-a}{n}$.
et dans chaque sous intervalle on applique la méthode de Simpson.

On obtient ainsi:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)\,dx .$$

$$= \frac{x_1-x_0}{6}\left(f(x_0)+4f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)+f(x_1)\right) + \frac{x_2-x_1}{6}\left(f(x_1)+4f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+f(x_2)\right)$$

$$+ \frac{x_3-x_2}{6}\left(f(x_2)+4f\left(\frac{x_2+x_3}{2}\right)+f(x_3)\right)+\cdots+\frac{x_n-x_{n-1}}{6}\left(f(x_{n-1})+4f\left(\frac{x_n+x_{n-1}}{2}\right)+f(x_n)\right).$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{6}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+4\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)\right]}$$

La dernière formule s'appelle formule de Simpson Composée.

<u>Théorème:</u> Si f est une fonction de classe C^4 sur $[a,b]$ et si S est l'approximation de $I=\int_a^b f(x)\,dx$ par la méthode de Simpson Composée alors $\exists\, \xi \in [a,b]$ tq

$$E = I - S = -\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{180\, n^4} f^{(4)}(\xi).$$

Rq Pour la méthode de Simpson simple l'erreur est donnée par:

$$E = \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \qquad \xi \in [a,b].$$

Exemple : • Appliquer la méthode de Simpson simple pour calculer

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$ (Comparer avec $\operatorname{Arctg} 2 = 1,107149$.

$a = x_0 = 0, \quad b = x_2 = 2 \quad x_1 = \frac{a+b}{2} = 1.$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx \simeq \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right) = \frac{2}{6}\left(1 + 4\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{16}{5}\right)$$

$$\simeq \frac{16}{15} = 1,07.$$

• Appliquer la méthode de Simpson composée avec $n=2$

pour calculer $\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx$. (comparer avec $\operatorname{Arctg} 2 = 1,107149$).

$n = 2 \Rightarrow h = \frac{b-a}{2} = 1$

$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

$0,5 \qquad 1,5$

$$\int_0^2 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{h}{6}\left[f(x_0) + f(x_2) + 2f(x_1) + 4\left(f(0,5) + f(1,5)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \frac{1}{5} + 2\frac{1}{2} + 4\left(0,8 + 0,3\right)\right] = \frac{1}{6}\left[2,2 + 4(1,1)\right]$$

$$= 1,1$$

Remarque : Si une formule de Quadrature ou d'intégration numérique vérifie $\int P(x) =$ formule $\forall P$ polynôme de degré $\leq n$ on dit qu'elle est de degré de validité (ou de degré) n.