Chapitre III

Initiation à la théorie de Bifurcation.

Définition: Soit une équation différentielle dépendant d'un paramètre; si pour une valeur particulière de celui-ci se produit un changement qualitatif, quantitatif, topologique ou autre, alors ce changement est appelé bifurcation.

I. Bifurcation dans R

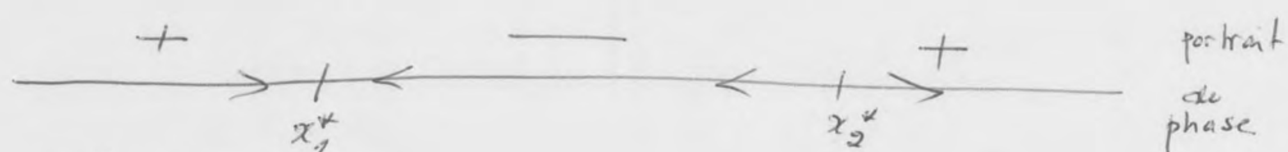
Exemple 1: Considérons l'équation:

$$\dot{x} = f(x,\lambda) = x^2 + \lambda.$$

trois cas se présentent à nous:

1. $\lambda < 0$; deux points d'équilibre.

$x_1^*(\lambda) = x_1^* = -\sqrt{-\lambda}$ et $x_2^*(\lambda) = x_2^* = \sqrt{-\lambda}$.



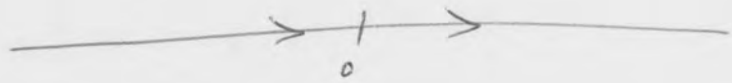
x_1^* est stable

x_2^* est instable

2. $\lambda=0$.

l'équation se réduit à $\dot{x}=x^2$, admettant un point d'équilibre unique. $x^*=0$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{x^*}=0$ x^* est non hyperbolique.

Cependant $\forall x\neq 0$ $\dot{x}>0$. donc $x^*=0$ est un shunt positif



3. $\lambda>0$.

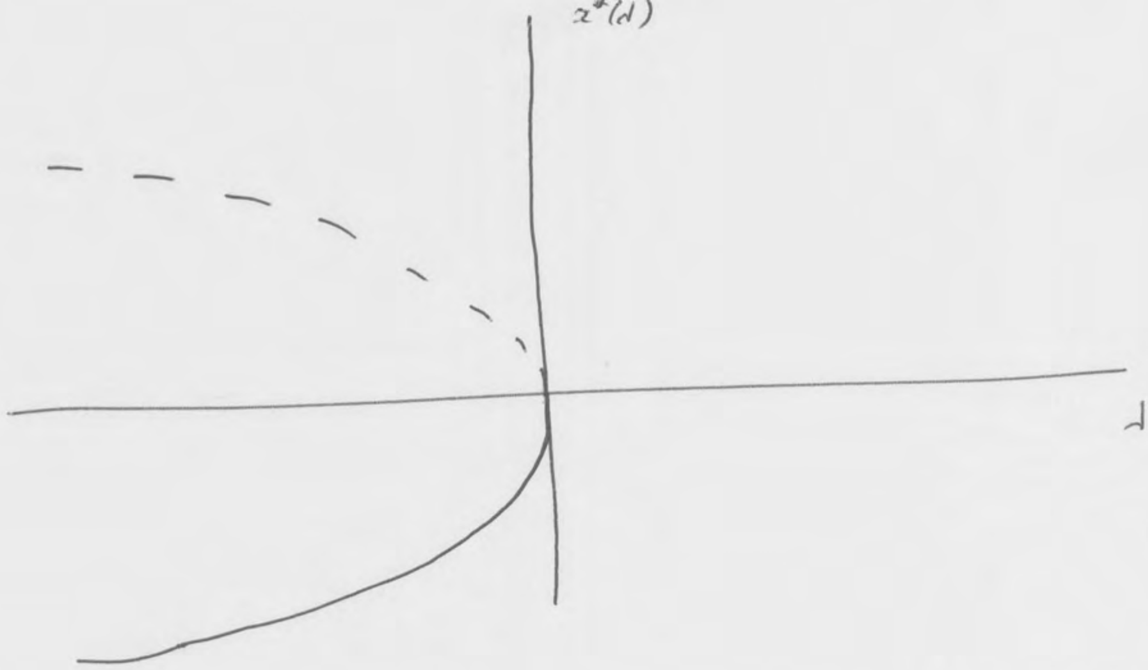
Dans ce cas l'équation ne possède aucun point d'équilibre, $\dot{x}=x^2+\lambda>0$ donc x est toujours croissante avec le temps.

—

On résume les résultats précédents dans un diagramme de bifurcation, on porte en abcisse le paramètre λ et en ordonnées les points d'équilibre.

En traversant la valeur $\lambda=0$ le nombre de points d'équilibre passe de deux à zéro.

Cette valeur particulière de λ est la valeur de bifurcation appelée dans ce cas bifurcation selle-noeud (saddle-node).



La branche en trait plein signifie que les points d'équilibre sont stables.

La branche en trait tireté " " " " " sont instables.

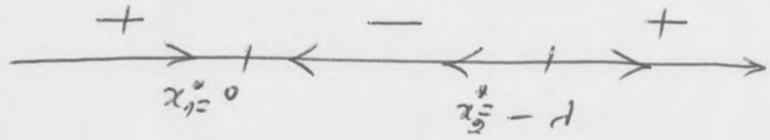
<u>Exemple 2</u>: Considérons l'équation:

$$\dot{x} = x^2 + \lambda x$$

Points d'équilibre. $x^2 + \lambda x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -\lambda$.

Pour l'étude de la stabilité trois cas se présentent à nous.

1. $\lambda < 0$

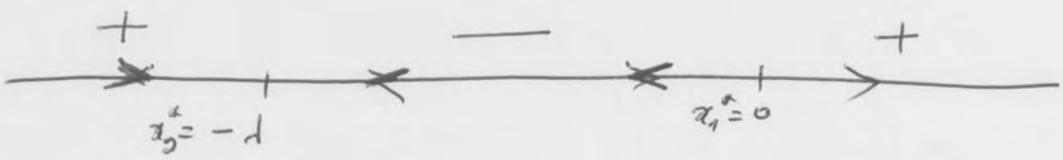


$x_1^* = 0$ est un point stable
$x_2^* = -\lambda$ — — — instable

2. $\lambda = 0$

Dans ce cas l'équation est réduite à $\dot{x} = x^2$ admettant un équilibre unique $x^* = 0$ non hyperbolique qui est un shunt positif.

3. $\lambda > 0$.



ainsi cette fois $x_1^* = 0$ est instable et
$x_2^* = -\lambda$ est stable

en traversant la valeur $\lambda = 0$ le nombre de points d'équilibre ne change pas cette fois-ci, mais leur stabilité change.

$x_1^* = 0$ passe de stable à instable
et x_2^* " " instable à stable

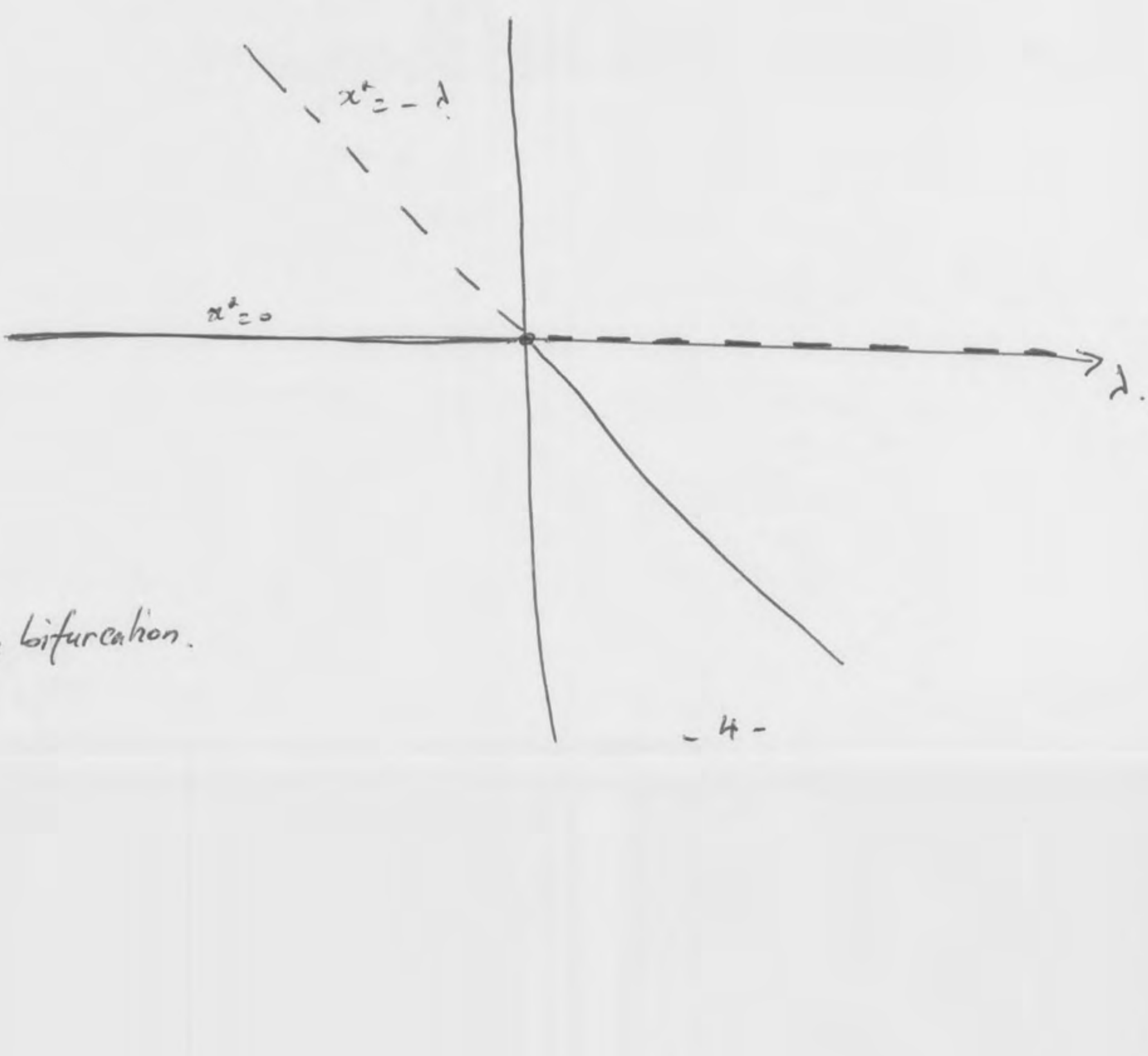


Diagramme de bifurcation.

Cette bifurcation est appelée transcritique

—

<u>Exemple 3</u> : Considérons l'équation :

$$\dot{x} = \lambda x - x^3.$$

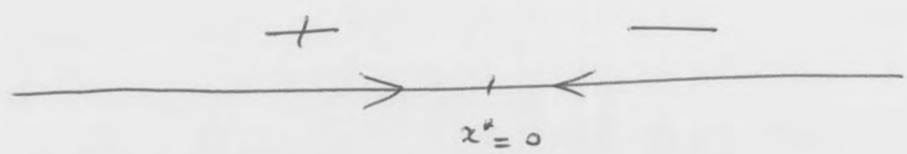
Recherche des points d'équilibre

$$\lambda x - x^3 = 0 \Rightarrow x(\lambda - x^2) = 0.$$

Trois cas se présentent à nous.

1/ $\lambda < 0$

Un seul point d'équilibre $x^* = 0$.



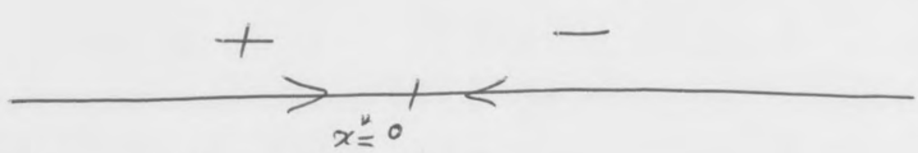
$x^* = 0$ est stable.

2/ $\lambda = 0$.

Dans ce cas l'équation est réduite à

$$\dot{x} = -x^3.$$

admettant un point d'équilibre unique $x^* = 0$, non hyperbolique

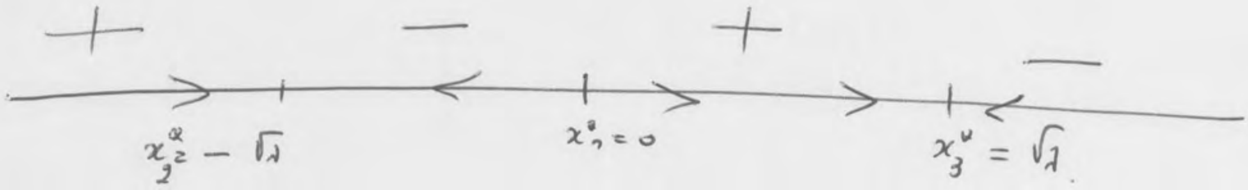


$x^* = 0$ est stable

3/ $\lambda > 0$.

Dans ce cas nous avons trois points d'équilibre

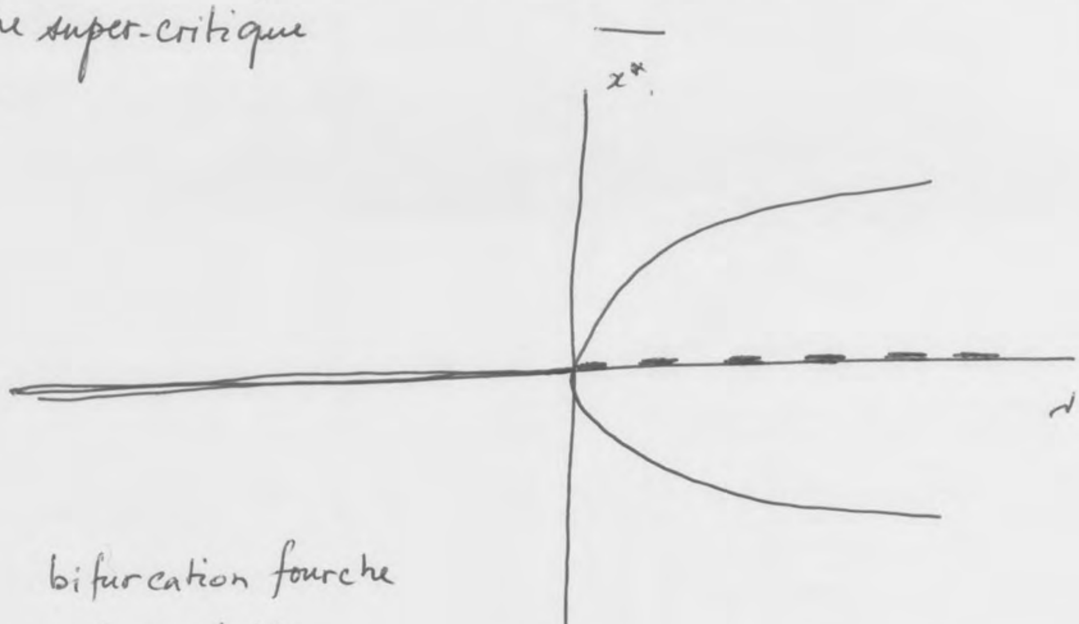
$$x(\lambda - x^2) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0 , \; x_2^* = -\sqrt{\lambda} , \; x_3^* = \sqrt{\lambda}.$$



Donc $x_1^* = 0$ est un point d'équilibre instable entouré de deux points d'équilibre stables.

En traversant la valeur $\lambda = 0$; le point d'équilibre qui $x^* = 0$ est stable pour $\lambda < 0$ devient instable dédoublé de deux points d'équilibre stables, cette bifurcation est appelée bifurcation fourche super-critique

Exem



bifurcation fourche (pitchfork). Super-critique.

<u>Exemple 4</u>: Considérons l'équation :

$$\dot{x} = \lambda x + x^3.$$

Demême les points d'équilibre sont donnés par :

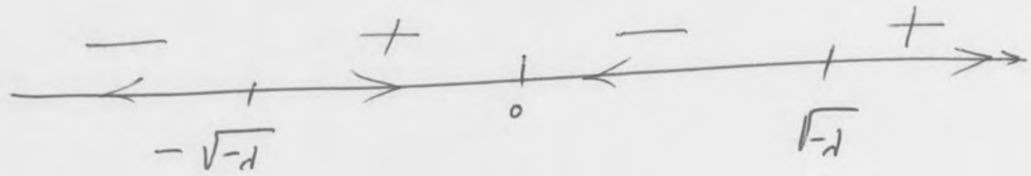
$$\lambda x + x^3 = 0 \iff x(\lambda + x^2) = 0.$$

Trois cas se présentent à nous.

1. $\lambda < 0$.

l'équation possède alors trois points d'équilibre

$$x_1^* = 0 \qquad x_2^* = -\sqrt{-\lambda}\ , \quad x_3^* = \sqrt{-\lambda}.$$



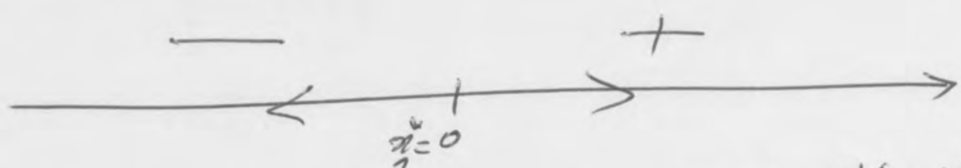
$x_1^* = 0$ est stable entouré de deux points instable.

2. $\lambda = 0$. l'équation est alors réduite à

$$\dot{x} = x^3$$

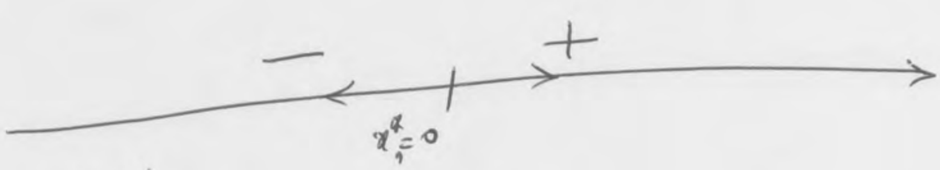
l'équation possède un unique point d'équilibre non hyperbolique

$x^* = 0$, instable



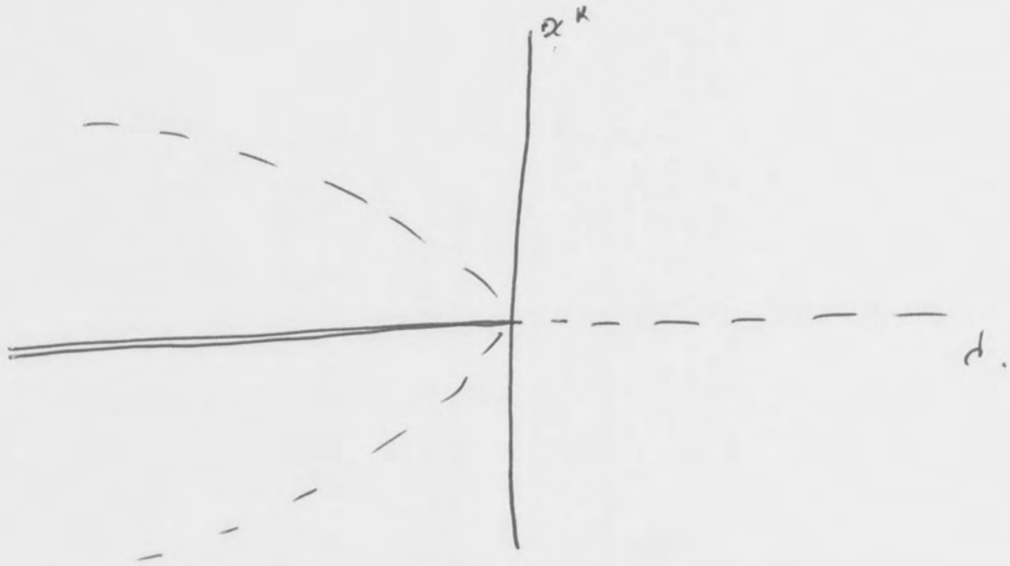
3. $\lambda > 0$ l'équation possède alors un unique point d'équilibre

$x_1^* = 0$



$x_1^* = 0$ instable

Ainsi lorsque l'on traverse la valeur le point d'équilibre situé à l'origine passe de stable à instable ; et les deux autres points d'équilibre instable disparaissent. Cette bifurcation est appelée bifurcation fourche sous-critique.

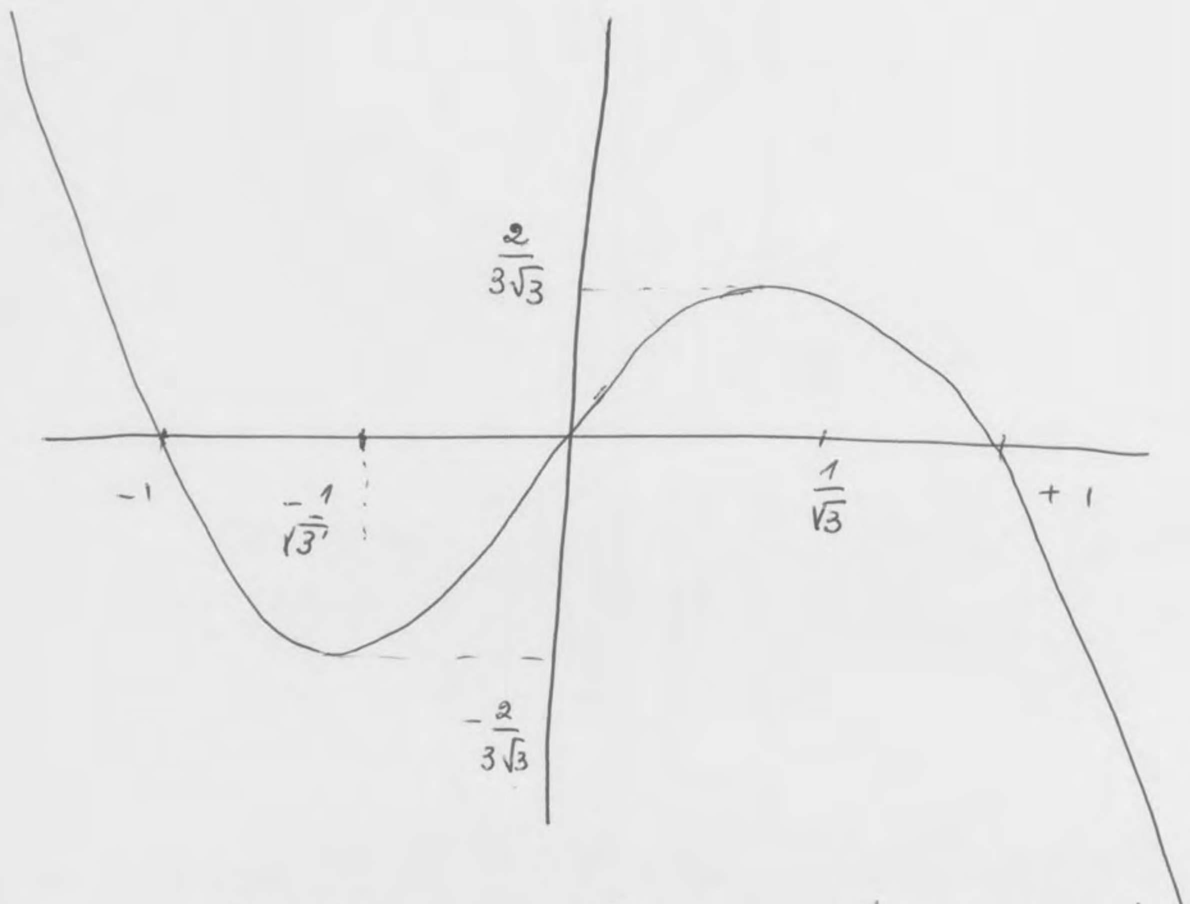


Exemple 5 : Considérons l'équation :

$$\dot{x} = \lambda + x - x^3.$$

recherche des points d'équilibre ; résolvons géométriquement

l'équation $\quad x - x^3 = -\lambda.$



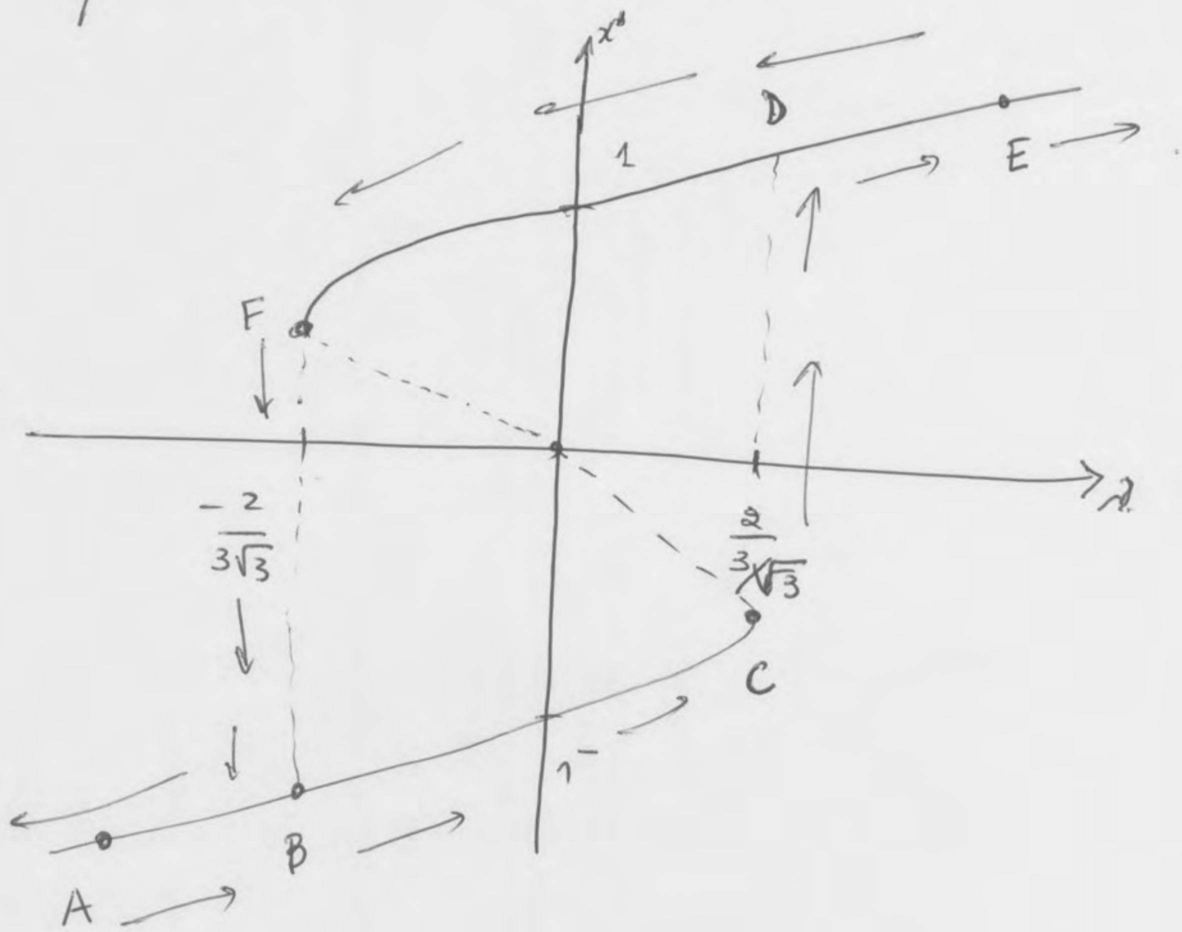
les points d'équilibre de l'équation se trouvent à l'intersection

de la courbe $f(x) = x - x^3$ et des droites $y = -\lambda$.

- si $\lambda > \frac{2}{3\sqrt{3}}$ $\left(-\lambda < -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$ l'équation admet un point unique asymptotiquement stable
- si $-\frac{2}{3\sqrt{3}} < \lambda < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ le système trois points d'équilibre un point instable entouré de deux points stables.

• si $c < -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ l'équation admet un seul point d'équilibre. stable

• si $c = \pm\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 2 points d'équilibre l'un stable l'autre non hyperbolique (shunt).



$\lambda \nearrow$ de $-\infty$ à $+\infty$ ABCDE

$\lambda \searrow$ de $+\infty$ à $-\infty$ EDFBA

selon que λ croît ou décroît le chemin parcouru n'est pas le même

Ce type de bifurcation est appelé hystérésis.

Bifurcation dans $\mathbb{R}$ à deux paramètres :

Nous n'allons présenté qu'un seul type de bifurcation à deux paramètres, appelé "Cusp" - fronce.

Considérons l'équation suivante :

$$\dot{x} = c + dx - x^3 = f(x, c, d) \qquad (E)$$

où c et d sont deux paramètres réels.

Comme c est un paramètre additif ; il est possible de réécrire l'équation précédente comme suit :

$$\dot{x} = f(x, 0, d) + c \qquad (f(x,0,d) = dx - x^3.)$$

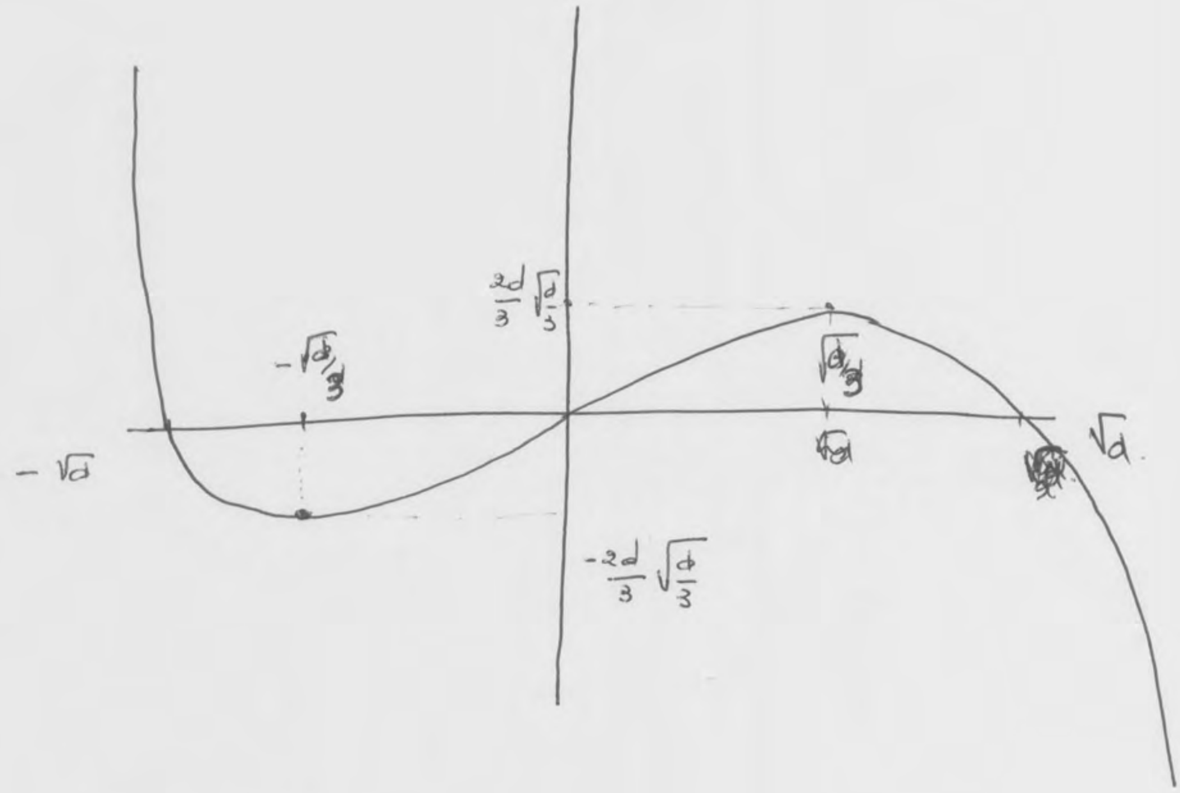
ainsi les points d'équilibre se trouvent à l'intersection de la courbe $f(x,0,d)$ et de la droite $y = -c$.

$$f(x, 0, d) = x(d - x^2).$$

1er Cas :

$d > 0$ Dans ce cas la courbe $f(x,0,d)$. s'annule en trois points.

$x = 0$ et $\pm\sqrt{d}$, et présente un maximum en $x = \sqrt{\frac{d}{3}}$ et un minimum en $x = -\sqrt{\frac{d}{3}}$ d'ordonnées $\pm \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$.



Donc graphiquement :

- Pour $-\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}} < c < \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$ le système admet trois points d'équilibre un instable (à l'origine), entouré de deux points d'équilibre stable

- Pour $c = \pm \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$ deux points d'équilibre un shunt et un point d'équilibre stable

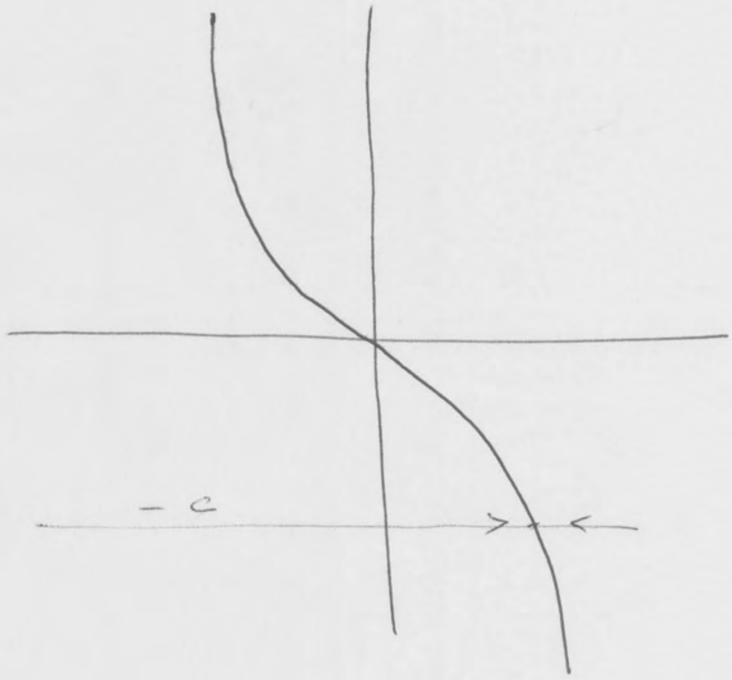
- Si $x > \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$ ou $x < -\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}}$ le système admet un unique point d'équilibre stable

---

<u>Deuxième Cas</u> : $d = 0$.

Dans ce cas $f(x,0,d) = f(x,0,0) = -x^3$.

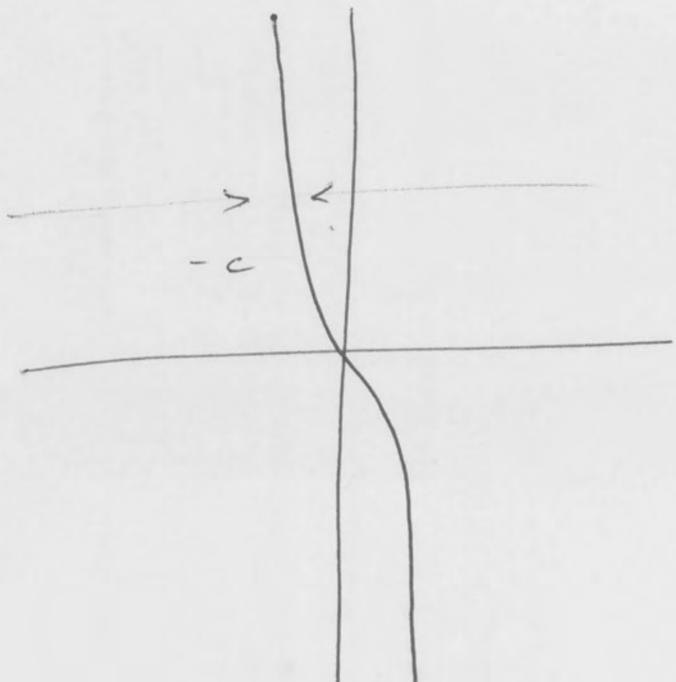
et le système ne possède qu'un point d'équilibre stable



<u>3ème cas</u> <u>$d<0$</u> : $f(x,0,d) = x(d - x^2)$

là aussi le système ne possède qu'un seul point d'équilibre

stable.



En résumé, deux cas peuvent se produire, soit un point d'équilibre stable soit trois points d'équilibre dont deux stable et un instable, les valeurs pour lesquels se produit la transition de un à trois points sont :

$$c = \pm \frac{2d}{3}\sqrt{\frac{d}{3}} = \pm 2\sqrt{\frac{d^3}{27}}.$$

(se sont les points qui vérifient $\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \end{cases}$).

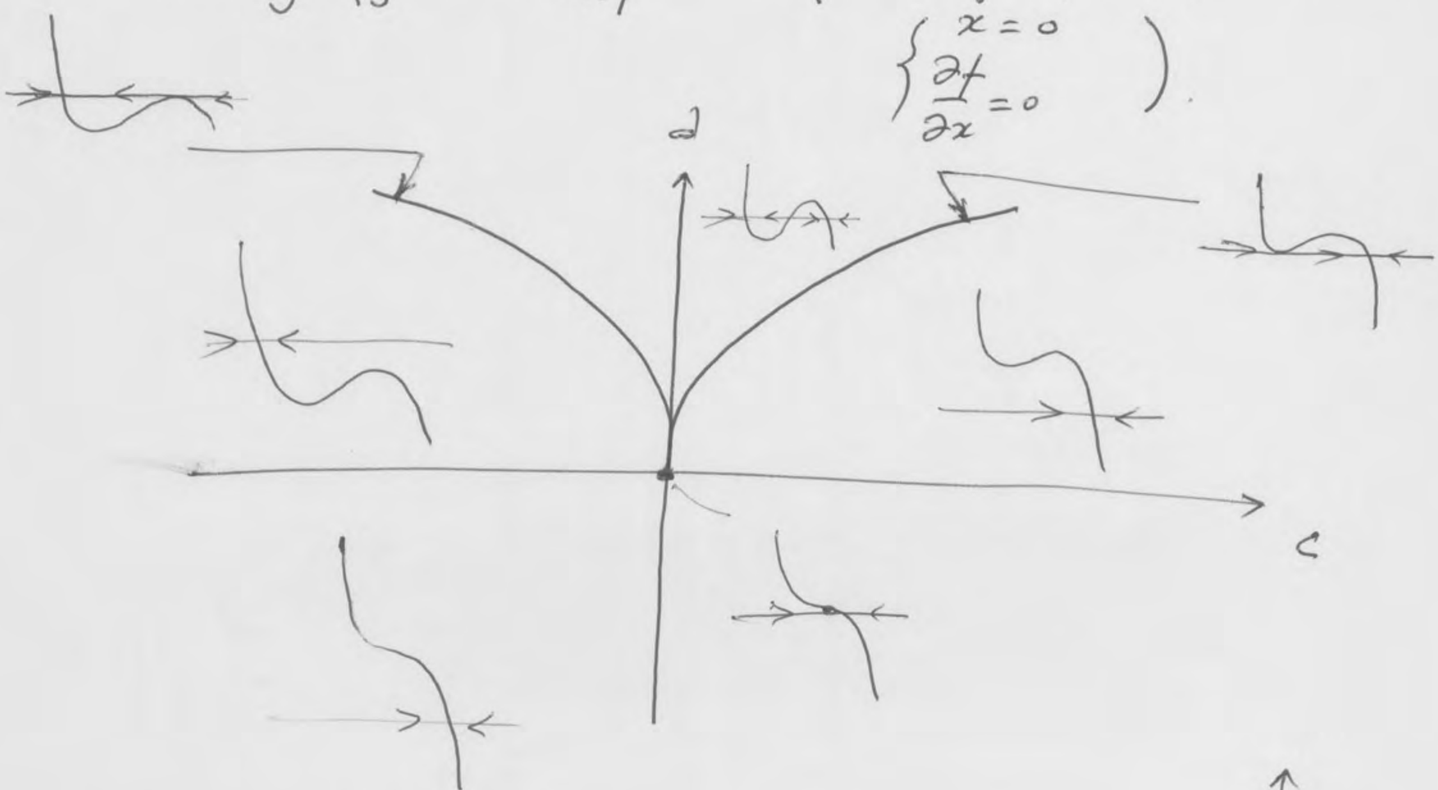
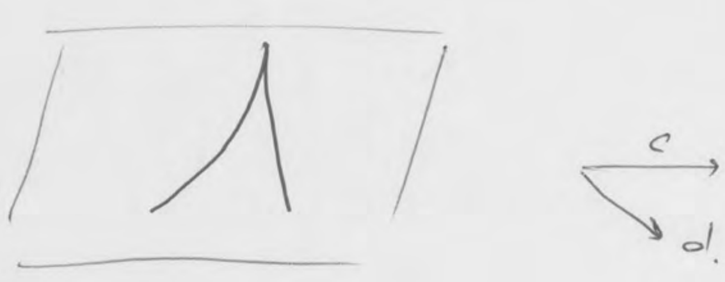


Diagramme de bifurcation.



II. Bifurcations dans $\mathbb{R}^2$:

Exemple 1 : On considère le système

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 + \lambda \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

1er cas : $\lambda < 0$.

le système admet deux points d'équilibre de coordonnées

$(-\sqrt{-\lambda}, 0)$ et $(\sqrt{-\lambda}, 0)$.

pour déterminer la nature des points d'équilibre ; On procède par linéarisation.

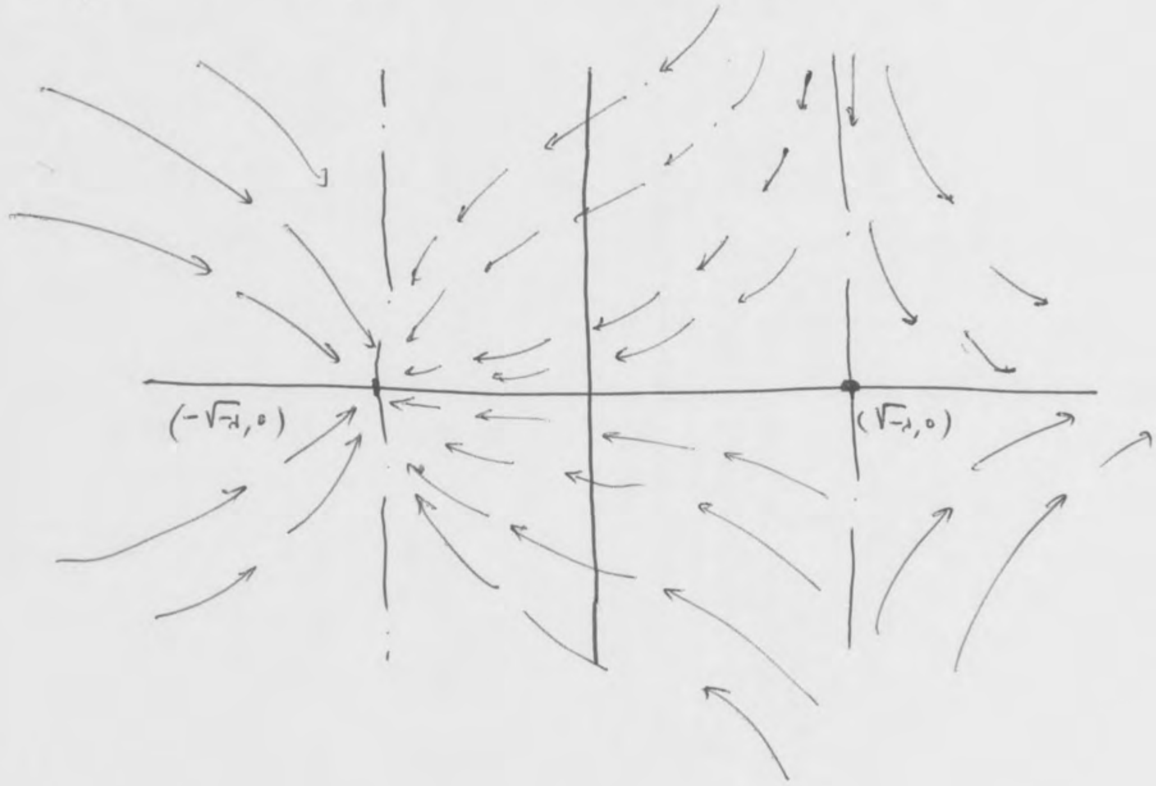
Matrice Jacobienne $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

pour $(-\sqrt{-\lambda}, 0)$ $\quad J_{(-\sqrt{-\lambda},0)} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{-\lambda} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ deux valeurs propres négatives

$\lambda_1 = -2\sqrt{-\lambda}$, $\lambda_2 = -1$ donc $(-\sqrt{-\lambda}, 0)$ est un point stable (noeud stable (dans un cas particulier étoile stable))

pour $(\sqrt{-\lambda}, 0)$ $\quad J_{(\sqrt{-\lambda},0)} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{-\lambda} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \det J < 0$

Donc $(\sqrt{-\lambda}, 0)$ est un point selle (instable) le portrait de phases est alors de la forme :

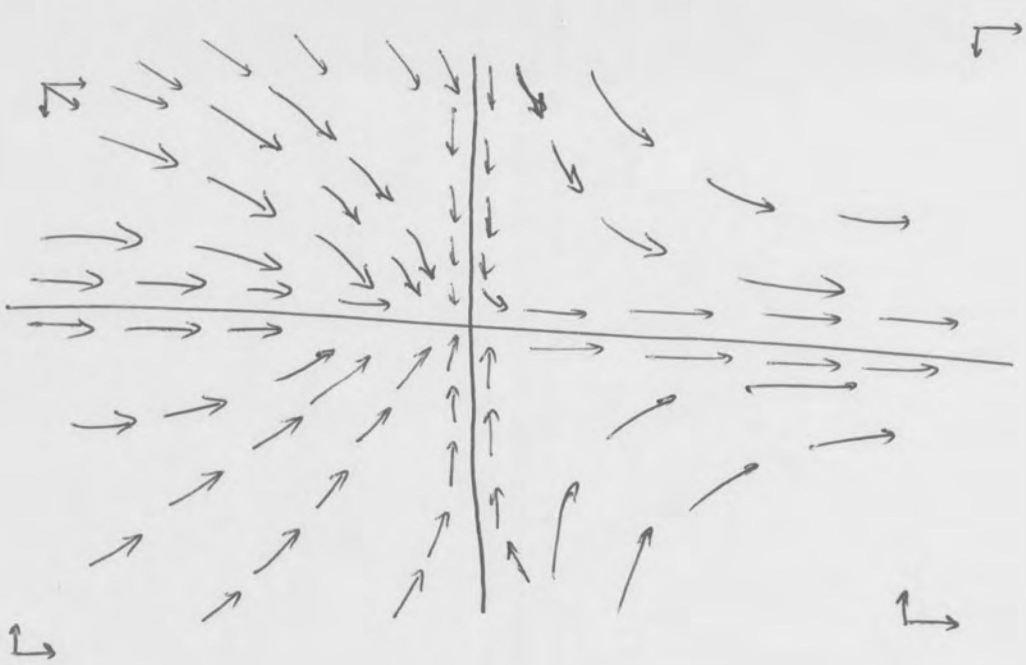


<u>$2^{ème}$ cas</u> $\lambda = 0$.

Dans ce cas le système est réduit à $\begin{cases} \dot{x} = x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

un seul point d'équilibre $(0,0)$ $\quad J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. donc $(0,0)$ est non-hyperbolique.



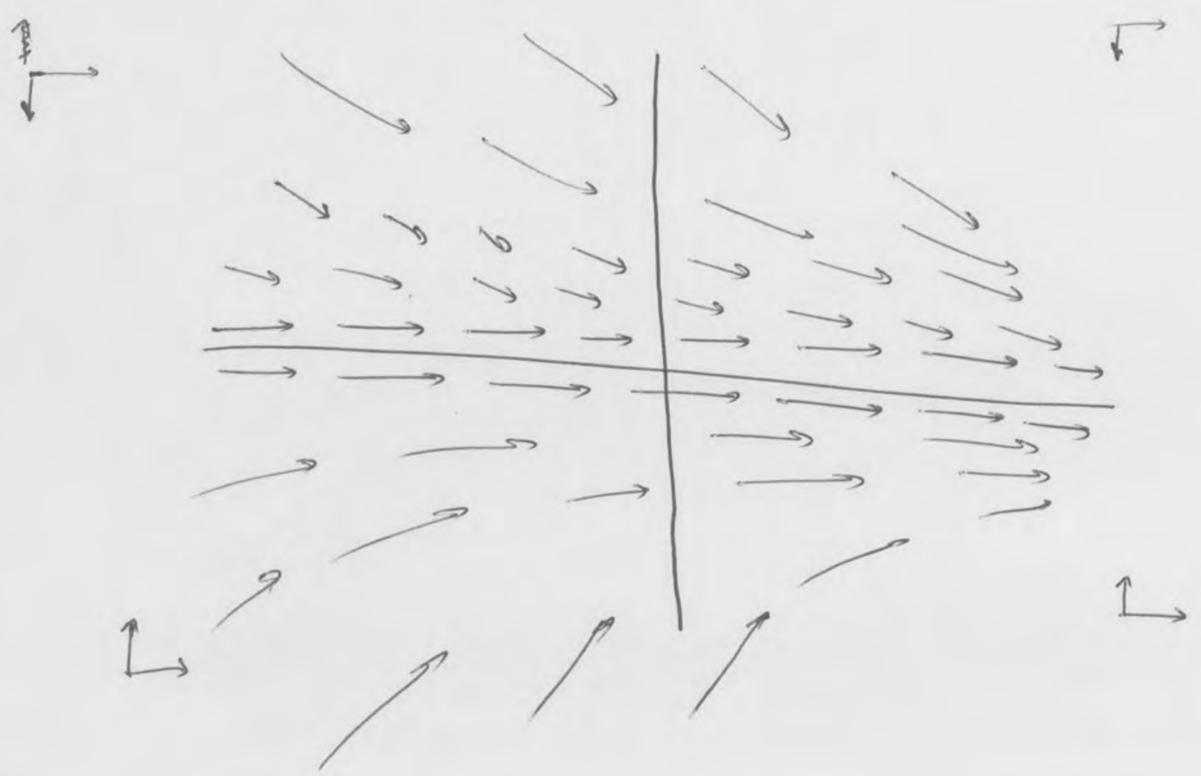
Le portrait de phase prend l'apparence d'un noeud stable pour $x<0$ et d'un point selle pour les $x>0$.

Les deux équations n'étant pas couplées $\dot{x} = x^2$ (shunt positif). $x = 0$.

$\dot{y} = -y$ ($y=0$ point stable).

. <u>3ème cas</u>. <u>$\lambda > 0$</u> le système $\begin{cases} \dot{x} = x^2+\lambda \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$

n'admet alors aucun point d'équilibre.



lorsqu'on traverse la valeur de bifurcation $\lambda^* = 0$

on passe de deux points d'équilibre l'un instable (point selle) et l'autre stable (noeud) —— bifurcation saddle-node selle-noeud —— puis aucun point d'équilibre

Exemple 2 : Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(-\lambda - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$

1er Cas : $\lambda < 0$.

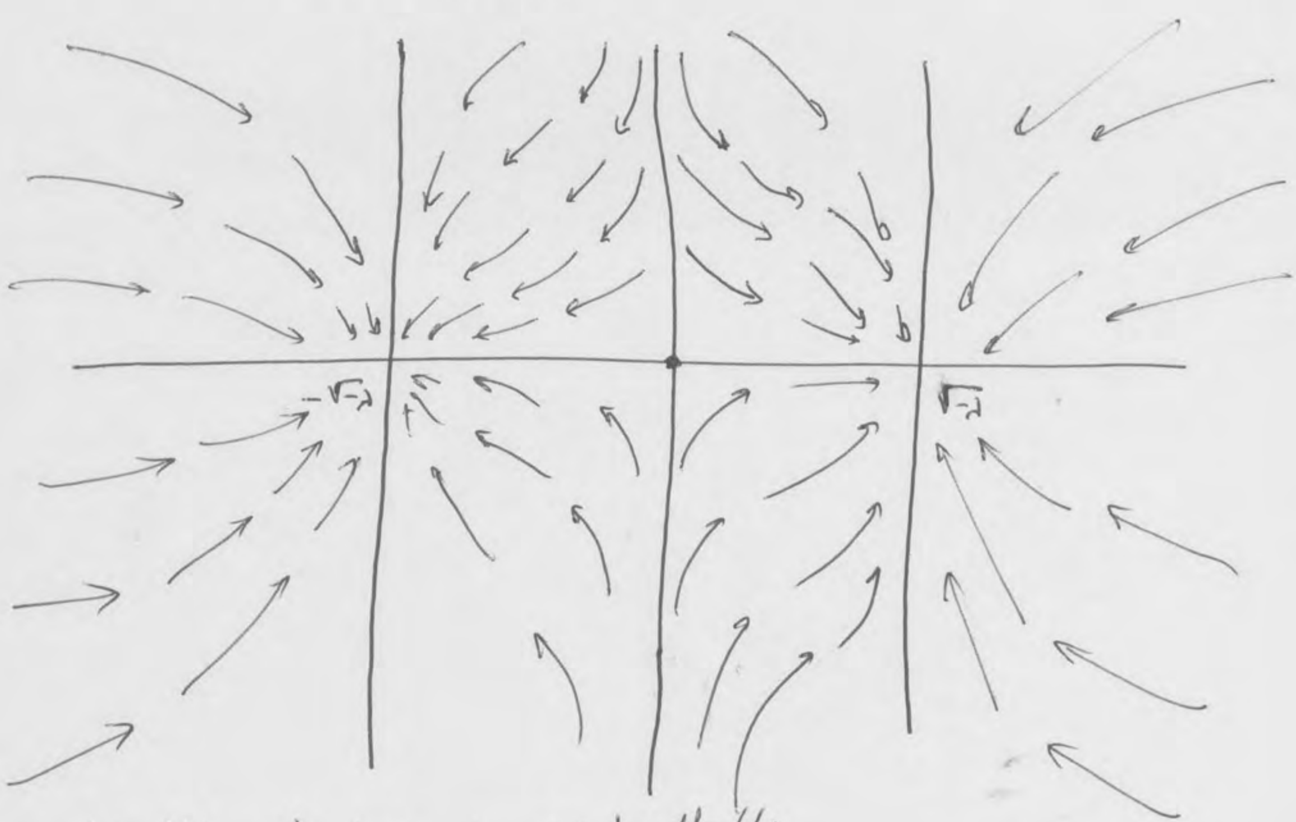
le système admet alors 3 points d'équilibre ; $(0,0)$, $(-\sqrt{-\lambda},0)$, $(\sqrt{-\lambda},0)$.
on linéarise le système pour déterminer la nature de chacun de ces points.

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -\lambda - 3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ deux valeurs propres de signe opposé ; $(0,0)$ point selle (instable).

$$J_{(-\sqrt{-\lambda},0)} = J_{(\sqrt{-\lambda},0)} = \begin{pmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$ deux valeurs propres négatives.

donc $(-\sqrt{-\lambda},0)$ et $(\sqrt{-\lambda},0)$ sont stable (noeuds — étoiles).



Un point instable entouré de deux points stable

• $\lambda = 0$

Dans ce cas le système est réduit à

$$\begin{cases} \dot{x} = -x^3 \\ \dot{y} = -y. \end{cases}$$

l'origine est le seul point d'équilibre ;

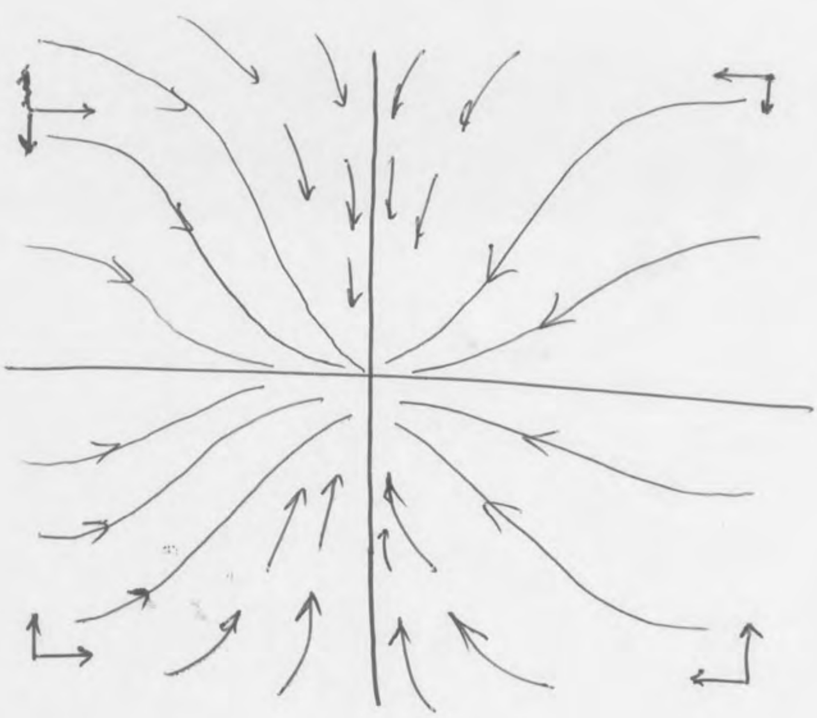
$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -3x^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(0,0) est un point non hyperbolique.

Pour déterminer la stabilité de (0,0) on utilise la fonction de Lyapunov suivante : $V(x,y) = x^2 + y^2$

il vient que $\dot{V}(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = -2(x^4 + y^2)$.

$\dot{V} < 0$ donc V est une fonction de Lyapunov est (0,0) est alors un pt stable

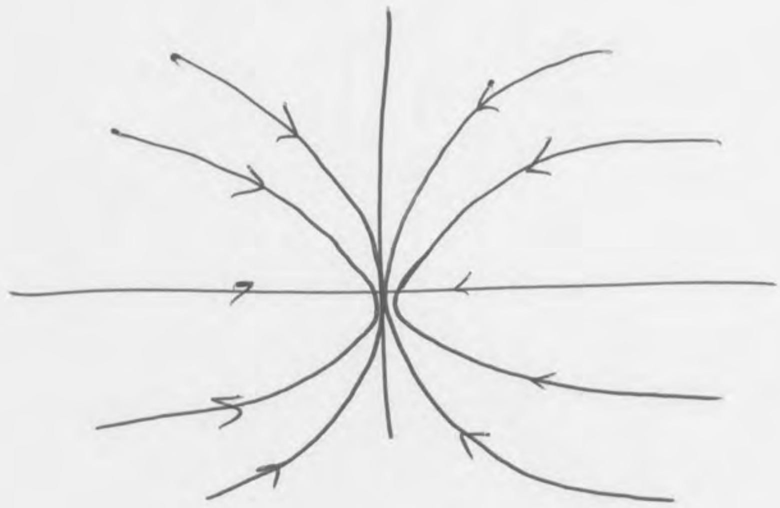


$3^{ème}$ cas $\lambda > 0$: le système $\begin{cases} \dot{x} = x(-\lambda - x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$

le système admet un unique point d'équilibre $(0,0)$.

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -3x^2-\lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

deux valeurs réelles négative donc l'origine est un points stable qui peut être noeud (et dans un cas particulier étoile).



En résumé à la valeur du paramètre $\lambda^* = 0$ le système voit le nombre de point d'équilibre passer de 3 à 1, donc nous avons un point selle entouré de deux points stables, pour $\lambda \geq 0$ le système n'admet qu'un point d'équilibre asymptotiquement stable. Il s'agit donc d'une bifurcation fourche super-critique

Exemple 2 bis =

le système $\begin{cases} \dot{x} = x(-\lambda + x^2) \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ fournit un exemple de bifurcation fourche sous-critique.

• Exemple 3 : Soit le système (linéaire) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y \\ \dot{y} = -x + \lambda y \end{cases} \iff \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \dot{X} = AX.$$

Comme $\det A \neq 0$ $(\det A = \lambda^2 + 1)$ donc $(0,0)$ est le seul point d'équilibre.

• Si $\lambda < 0$ $\quad tr(A) = 2\lambda < 0$ et $\det(A) = \lambda^2 + 1 > 0$.

donc l'origine est asymptotiquement stable (foyer stable)

$\det(A - \alpha I) = (\lambda - \alpha)^2 + 1 > 0$ pas de solutions réelles

• Si $\lambda = 0$ le système est réduit à :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$(0,0)$ est un centre.

• Si $\lambda > 0$ le système $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$\det A = \lambda^2 + 1$, $\quad tr(A) = 2\lambda > 0$. l'origine est instable

$\left(\det(A - \alpha I) = (\lambda - \alpha)^2 + 1 > 0 \right.$ pas de solution réelle$\left. \right)$.

l'origine est un foyer instable

Ce type de bifurcation on a un seul point d'équilibre (foyer) qui change de nature est appelé bifurcation verticale.

Bifurcation générique de Poincaré-Andronov-Hopf.

• Bifurcation super-critique de Poincaré-Andronov-Hopf :

Exemple 4 : Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y - x(x^2+y^2). \\ \dot{y} = -x + \lambda y - y(x^2+y^2). \end{cases}$$

$(0,0)$ est le seul point d'équilibre

système qui peut être écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{\text{partie linéaire}} + \underbrace{\begin{pmatrix} -x(x^2+y^2) \\ -y(x^2+y^2) \end{pmatrix}}_{\text{partie non-linéaire}}.$$

lorsqu'on linéarise le système on obtient le système de l'exemple 3. donc $\lambda < 0$ foyer stable

$\lambda > 0$ foyer instable

$\lambda = 0$ on a des centres la linéarisation ne permet pas de conclure ; il faut donc étudier le cas $\lambda = 0$ autrement

$\lambda = 0$, considérons $V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y}$

pour $\lambda = 0$ le système devient

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x(x^2+y^2). \\ \dot{y} = -x - y(x^2+y^2). \end{cases}$$

$\dot{V} = xy - x^2(x^2+y^2) - xy - y^2(x^2+y^2)$

$\dot{V} = -(x^2+y^2)^2.$

V est définie positive

$\dot{V} < 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0).$

V est une fonction de Lyapunov forte

$(0,0)$ est asymptotiquement stable pour $\lambda = 0$.

La linéarisation ne donnant que des informations locals faisons une étude plus précise:

effectuons le changement $\begin{cases} r^2 = x^2+y^2 \\ tg\theta = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$ Coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta. \end{cases}$$

$$r^2 = x^2+y^2 \Rightarrow r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} = x(\lambda x+y) - x^2(x^2+y^2) + y(-x+\lambda y) - y^2(x^2+y^2).$$

$$= \lambda(x^2+y^2) - (x^2+y^2)^2 = r^2(\lambda - r^2).$$

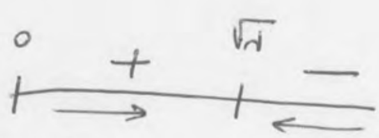
$$tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{\dot{\theta}}{\cos^2\theta} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = \frac{x[-x+\lambda y) - y(x^2+y^2)] - y[\lambda x+y - x(x^2+y^2)]}{r^2\cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = -\frac{r^2}{r^2} \Rightarrow \dot{\theta} = -1.$$

le système devient $\begin{cases} \dot{r} = r^2(\lambda - r^2). \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$

• $\lambda < 0$ $r = 0$ stable

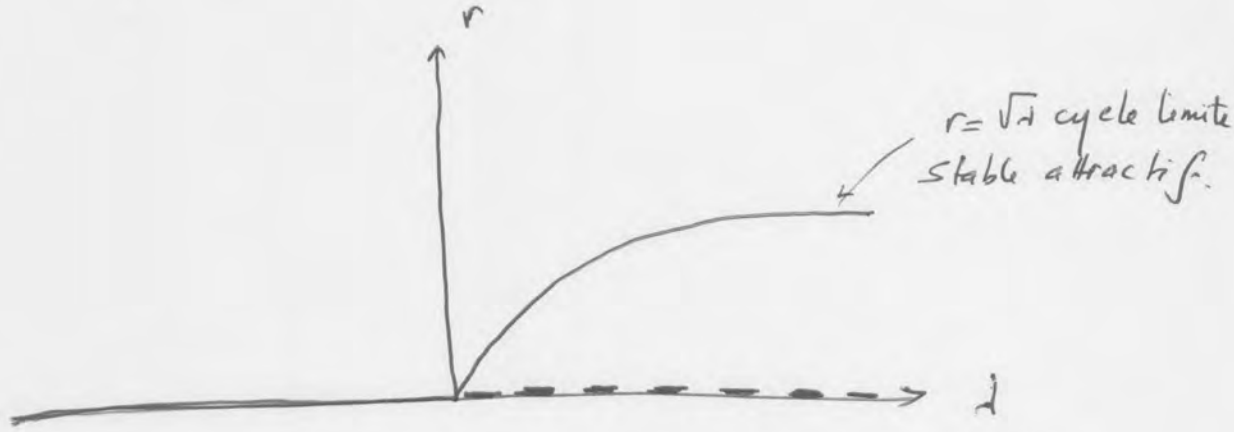
• $\lambda > 0$ $r = 0$ et $r = \sqrt{\lambda}$.



$r = \sqrt{\lambda}$ est stable
(cycle limite) attractif (stable)

, $\lambda = 0$ $r = 0$ $(0,0)$ pt d'équilibre stable

Nous pouvons maintenant, tracer le diagramme de bifurcation en portant en abcisses le λ et en ordonnées $r = x^2+y^2$. le rayon des pt d'équilibres et des cycles limites.



à la bifurcation $\lambda = 0$ le point d'équilibre à l'origine passe de stable à instable et s'entoure d'un cycle limite stable (attractif), on parle de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf super critique (P.A.H. super critique).

—

Bifurcation sous-critique de Poincaré-Andronov-Hopf :

Exemple 5 :

On considère le système :
$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda x + y + x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = -x + \lambda y + y(x^2+y^2) \end{cases}$$

ce système à la même partie linéaire que le système de l'exemple 4

Nous obtenons les mêmes conclusions pour $\lambda > 0$ et pour $\lambda < 0$

par contre pour $\lambda = 0$, $V(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2$

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = (x^2+y^2)^2.$$

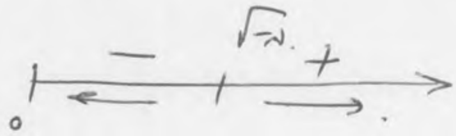
$\dot{V} > 0 \quad \forall (x,y) \neq (0,0)$; donc l'origine est instable si $\lambda = 0$.

Le passage en coordonnées polaires donne :

$$\begin{cases} \dot r = r^2(\lambda + r^2). \\ \dot\theta = -1. \end{cases}$$

∘ $\lambda<0$. $\dot r = r^2(\lambda+r^2)$ admet deux "pts" d'équilibre

$r=0$ et $r=\sqrt{-\lambda}$.



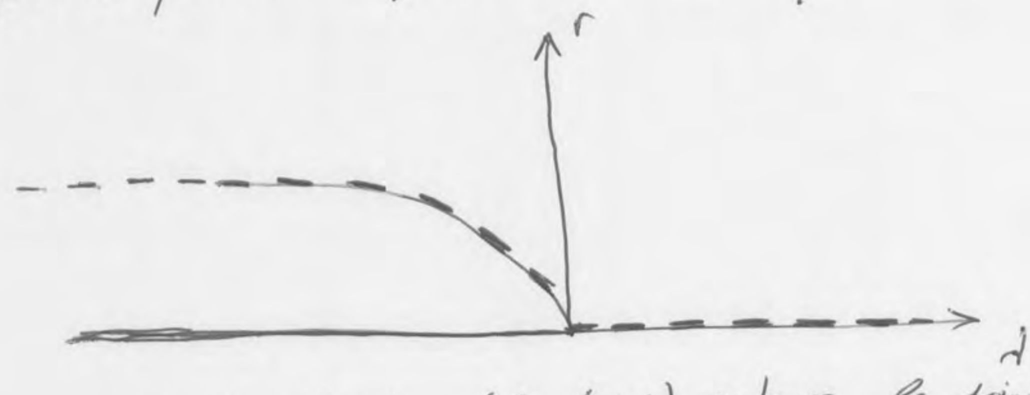
$r=0$ $(0,0)$ est stable ; et $r=\sqrt{-\lambda}$ est un cycle limite répulsif.

$\lambda>0$ $\dot r = r^2(\lambda+r^2)$.

$r=0$ est un pt d'équilibre instable

$\lambda=0$ par la fonction de Lyapunov $(0,0)$ est instable

Nous pouvons maintenant tracer le diagramme de bifurcation, en portant en abcisses les λ et en ordonnée $r=x^2+y^2$. le rayon de points d'équilibre et des cycles limite.



Un cycle limite instable (répulsif) entoure le point d'équilibre $(0,0)$ qui est stable ; On parle alors de bifurcation de Poincaré-Andronov-Hopf — sous-critique.

Soit le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \lambda) \\ \dot{y} = g(x, y, \lambda). \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Supposons que le système admet un point d'équilibre $(x^*(\lambda), y^*(\lambda))$ et soit $J^* = J_{(x^*, y^*)}$ la matrice Jacobienne calculée en ce point d'équilibre ; si les valeurs propres de J^* sont complexes conjuguées : $a(\lambda) \pm i\, b(\lambda)$.

Une bifurcation de Hopf (Poincaré Andronov Hopf) se produit si les valeurs propres du système linéarisé traverse l'axe imaginaire, ie la partie réelle s'annule

$$a(\lambda^*) = 0. \quad (\text{avec } b(\lambda^*) \neq 0) \;.\; \text{et } \left.\frac{da}{d\lambda}\right|_{\lambda^*} \neq 0.$$

i.e. $\quad a(\lambda^*) = 0$ et $b(\lambda^*) \neq 0$

Donc pour $\lambda = \lambda^*$ le système linéarisé préconise un centre.

. Si les centres sont conservés on dit que l'on a une bifurcation de Hopf (P.A.H) dégénérée.

Sinon (les centres ne sont pas conservée) on parle de bifurcation de Hopf super critique ou sous-critique selon que le cycle limite soit stable ou instable

Exemple 6 :

Considérons le système : $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + \lambda y - x^2 \end{cases}$ $\underline{\underline{\lambda \in \mathbb{R}}}$. $\lambda \in [-2, 2]$.

les points d'équilibre sont : $(0,0)$ et $(1,0)$.

$$J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-2x & \lambda \end{pmatrix}$$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_{(0,0)} = -1 \Rightarrow (0,0) \text{ pt selle. } \forall \lambda.$$

$$J_{(1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \det = 1 \;;\; tr = \lambda \;;\; \Delta = \lambda^2 - 4.$$

Si $-2 < \lambda < +2$ alors $(1,0)$ est un foyer.
stable si $-2 < \lambda < 0$ et instable si $0 < \lambda < 2$.

On se limite à l'étude du point de bifurcation

$\lambda^* = 0$.

$(1,0)$ est alors un centre pour $\lambda^* = 0$;

Considérons une intégrale première

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - x^2}{y} \Rightarrow y\,dy = (x - x^2)\,dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C.$$

$$H(x,y) = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$H(x,y) = H(1,0) + \frac{(x-1)^2 + y^2}{2}$$

les centres sont conservés P.A.H dégénérée.

Théorème de Poincaré – Andronov – Hopf :

Soit la famille de systèmes : $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y,\lambda) \\ \dot{y} = g(x,y,\lambda) \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. (I)

Supposons que (x^*, y^*) est un pt d'équilibre pour le système (I) (i.e. $f(x^*, y^*, \lambda) = g(x^*, y^*, \lambda) = 0$).

Supposons que $J_{(x^*, y^*)}$ la matrice jacobienne calculée au pt d'équilibre (x^*, y^*) possède des valeurs propres complexes conjuguées $\alpha(\lambda) \pm i\beta(\lambda)$.

Soit λ^* la valeur du paramètre telle que $\alpha(\lambda^*) = 0$ et $\beta(\lambda^*) \neq 0$.

vérifiant : $\left.\dfrac{d\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda^*} \neq 0$.

si $\left.\dfrac{d\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda^*} > 0$ trois cas sont possibles :

1/ Lorsque $\lambda = \lambda^*$ les centres sont conservés ; on parle de bifurcation de Hopf dégénérée.

2/ Lorsque $\lambda = \lambda^*$ $(x^*(\lambda^*), y^*(\lambda^*))$ est un équilibre stable alors pour $\lambda > \lambda^*$ (assez proche de λ^*). $(x^*(\lambda), y^*(\lambda))$ est un équilibre instable entouré d'un cycle limite stable (attractif). dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{\lambda - \lambda^*}$.

On parle de bifurcation de Hopf supercritique.

3°/ Lorsque $\lambda = \lambda^*$ $(x^*(\lambda^*), y^*(\lambda^*))$ est un équilibre instable

alors pour $\lambda < \lambda^*$ (assez proche de λ^*) $(x^*(\lambda), y^*(\lambda))$

est un équilibre stable entouré d'un cycle limite instable (répulsif). dont l'amplitude est proportionnelle à $\sqrt{\lambda^* - \lambda}$.

On parle de bifurcation de Hopf sous-critique.

<u>Remarque:</u>

- Il existe une version du théorème pour $\mathbb{R}^n$ —
- Si $\left.\dfrac{d\alpha}{d\lambda}\right|_{\lambda=\lambda^*} = \alpha'(\lambda^*) < 0$ il faut inverser stable par instable —
- Ce théorème prouve l'existence d'un cycle limite comme pour le théorème de Poincaré-Bendixon à ceci près que Poincaré Bendixon n'est appliquable que dans $\mathbb{R}^2$.