Chapitre 4 Convergences de Variables Aléatoires.

Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires.

· Convergence en moyenne:

On dit que la suite $\{X_n\}_n$ converge en moyenne vers une variable aléatoire X si

$$\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|) = 0.$$

On note $X_n \xrightarrow{L^1} X$

Exemple:

Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ où chaque variable aléatoire X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respectives $1-\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n}$.

alors $X_n \longrightarrow 0$ en moyenne. En effet

$$E(|X_n - 0|) = E(X_n) = 0\times\left(1-\frac{1}{n}\right) + 1\times\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0.$$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n - 0|) = 0.$

· Convergence en moyenne quadratique.

On dit que la suite $\{X_n\}_n$ converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X si

$$\lim_{n\to+\infty} E(|X_n - X|^2) = 0$$

On note $X_n \xrightarrow{L^2} X$

Convergence en probabilité:

On dit que la suite $(X_n)_n$ converge en probabilité vers une v.a. X si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n \to +\infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

On note $X_n \xrightarrow{P} X$

Exemple: Soit la suite $\{X_n\}_n$ où chaque X_n prend les valeurs $0, 1$ avec les probabilités respectives $(1-\frac{1}{n})$ et $\frac{1}{n}$.

alors $X_n \xrightarrow{P} 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ $\quad \lim_{n \to +\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = \lim_{n \to +\infty} P(X_n \geq \varepsilon)$

1er cas $\varepsilon > 1$

Dans ce cas $P(X_n \geq \varepsilon) = 0$ $\quad$ (X_n prend les valeurs 0, et 1)

donc $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0.$

2ème cas: $0 < \varepsilon \leq 1$.

Dans ce cas $P(X_n \geq \varepsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

donc $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0.$

En Conclusion $X_n \xrightarrow{P} 0$

Convergence presque sûre

On dit que la suite $\{X_n\}_n$ converge presque sûrement vers une V.A. X si

$$P\{\omega \in \Omega,\ \lim_{n \to +\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\} = 1.$$

on note $\qquad X_n \xrightarrow{P.S} X$

Théorème:

Soit la condition: $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n \geq 1} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty \qquad (*)$

- Si $\{X_n\}_n$ vérifie $(*)$ alors $X_n \xrightarrow{P.S} X$
- Réciproquement si $\{X_n\}_n$ est une suite de VA indépendantes qui converge presque sûrement vers X alors $\{X_n\}_n$ vérifie $(*)$.

Exemple: Soit $\{X_n\}_n$ la suite de v.a où chaque X_n prend les valeurs 0 et 1 avec les probabilités respective $1 - \frac{1}{n^2}$ et $\frac{1}{n^2}$.

alors $\qquad X_n \xrightarrow{P.S} X = 0$

En effet Calculons $\displaystyle\sum_{n \geq 1} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = \sum_{n \geq 1} P(X_n \geq \varepsilon)$

1er cas $\quad \varepsilon > 1 \quad$ alors $P(X_n \geq \varepsilon) = 0.$

Donc $\displaystyle\sum_{n \geq 1} P(X_n \geq \varepsilon) = 0 < \infty.$

2ème cas: $\quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad$ alors $P(X_n \geq \varepsilon) = P(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}.$

Donc $\displaystyle\sum_{n \geq 1} P(X_n \geq 0) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < \infty \qquad \left(\sum \frac{1}{n^\alpha} < 0 \text{ ssi } \alpha > 1.\right)$

série de Riemann.

Convergence en loi

On dit que la suite $\{X_n\}_n$ dont les fonctions de répartition correspondants est $\{F_n\}_{n\geq 1}$ converge en loi vers la v.a. X si

$$\lim_{n\to+\infty} F_n(t) = F_X(t)$$ où F_X est la F.d.r. de X.

pour tout point t où F_X est continue.

On note alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

Hiérarchie:

$$\begin{array}{ccc} X_n \xrightarrow{L^2} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{L^1} X \\ & & \Downarrow \\ X_n \xrightarrow{ps} X & \Longrightarrow & X_n \xrightarrow{P} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X \end{array}$$

Théorème Central limite :

Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace, indépendants et identiquement distribuées, suivant toutes la même loi. d'espérance m et d'écart type σ.

Considérons la somme $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

alors l'espérance de S_n est nm et son écart type est $\sqrt{n} \cdot \sigma$.

Prenons alors $\overline{X}_n = \dfrac{S_n}{n} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$

et $Z_n = \dfrac{S_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} = \dfrac{\overline{X}_n - m}{\sigma / \sqrt{n}}$

l'espérance de Z_n est 0 et l'écart-type de Z_n est 1. (Variable centrée réduite)

alors la suite $\{Z_n\}_n$ converge en loi vers Z de loi normale $N(0,1)$.

Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} P(Z_n \leq t) = \Phi(t)$

où $\Phi(t)$ est la F.dr de $N(0,1)$ qu'on retrouve dans la table.

Exercices

Ex1 : Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ la suite de variables aléatoirs définis par :

x	0	n
$P(X_n = x)$	$1-1/n$	$1/n$

Etudier la convergence de la suite $\{X_n\}_n$ en moyenne quadratique vers 0 et en probabilité vers 0.

Solution:

1/ $E(|X_n - 0|^2) = E(X_n^2) = 0^2 \times (1-\frac{1}{n}) + n^2 \cdot \frac{1}{n}$

$$= n \longrightarrow +\infty .$$

Donc $\{X_n\}_n$ ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

2/ Soit $\varepsilon > 0$ $\quad P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P(X_n \geq \varepsilon) = \begin{cases} P(X_n = n) & \text{si } n \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } n < \varepsilon \end{cases}$

$$= \begin{cases} 1/n & \text{si } n \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } n < \varepsilon \end{cases}$$

ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$.

Donc $\{X_n\}_n$ converge en probabilité vers 0.

Ex2 :

Soit $\alpha \in \mathbb{N}^*$, soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoire

La loi de X_n est donnée par:

x	0	n
$P(X_n = x)$	$1-\frac{1}{n^\alpha}$	$\frac{1}{n^\alpha}$

1. On suppose dans cette question que $\alpha = 3$

La suite $\{X_n\}_n$ Converge-t-elle vers 0, en moyenne quadratique? En probabilité? En loi?

2. On suppose dans cette question que $\alpha = 2$

La suite $\{X_n\}_n$ Converge-t-elle vers 0 en moyenne quadratique? En probabilité? en loi?

Solution:

$\alpha = 3$

1/ $E(|X_n - X|^2) = E(|X_n - 0|^2) = E(X_n^2)$

$$= 0^2 \times \left(1-\frac{1}{n^3}\right) + n^2 \times \frac{1}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n}$$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} E(|X_n - 0|^2) = 0$.

$\{X_n\}_{n\geq 1}$ Converge en moyenne quadratique vers 0, donc elle

Converge aussi en probabilité et en loi vers 0.

2. $\alpha = 2$

- $E(|X_n - 0|^2) = E(X_n^2) = 0^2 \times \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) + n^2 \times \frac{1}{n^2}$.

$$= 1.$$

$$\lim_{n \to +\infty} E(|X_n - 0|^2) = 1.$$

$\{X_n\}_n$ ne converge pas en moyenne quadratique vers 0.

- Soit $\varepsilon > 0$

$$P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = P(X_n \geq \varepsilon) = \begin{cases} P(X_n = n) & \text{si } n \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } n < \varepsilon \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{n^2} & \text{si } n \geq \varepsilon \\ 0 & \text{si } n < \varepsilon \end{cases}$$

Donc $\lim_{n \to +\infty} P(|X_n - 0| \geq \varepsilon) = 0$

Donc $\{X_n\}_n$ converge en probabilité vers 0 et donc $\{X_n\}_n$ converge aussi en loi vers 0.

Exercice 3 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de V.a. indépendants.

1/ Montrer que pour tout $n\geq 1$ et tout $a\in\mathbb{R}$, on a :

$$E\left[(X_n-a)^2\right] = \left(E(X_n)-a\right)^2 + Var(X_n)$$

2/ En déduire que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en moyenne quadratique vers une constante a ssi on a les convergences

$$\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = a \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0.$$

Solution :

1/
$$\begin{aligned}
E\left[(X_n-a)^2\right] &= E\left[\left(X_n - E(X_n) + E(X_n) - a\right)^2\right] \\
&= E\left[\left((X_n - E(X_n)) + (E(X_n)-a)\right)^2\right] \\
&= E\left[(X_n - E(X_n))^2\right] + 2E\left[(X_n - E(X_n))(E(X_n)-a)\right] + \left(E(X_n)-a\right)^2 \\
&= Var(X_n) + 2E\left[\underbrace{(X_n - E(X_n))}_{=0}\underbrace{(E(X_n)-a)}_{cste}\right] + \left(E(X_n)-a\right)^2 \\
&= Var(X_n) + \left(E(X_n)-a\right)^2 \quad \text{cqfd.}
\end{aligned}$$

2/ Il faut montrer que :

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\left(E\left[(X_n-a)^2\right]\right) = 0\right) \Longleftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = a \text{ et } \lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0\right)$$

" $\Longrightarrow$ " On suppose que $\lim_{n\to+\infty} E\left[(X_n-a)^2\right] = 0$.

Or $\underset{\downarrow\, 0}{E\left[(X_n-a)^2\right]} = \underbrace{\left(E(X_n)-a\right)^2}_{\geq 0} + \underbrace{Var(X_n)}_{\geq 0}$ D'après la quest 1.

Donc nécessairement $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$.

" $\Longleftarrow$ " Supposons que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = a$ et $\lim_{n\to+\infty} V(X_n) = 0$.

D'après la première question $\lim_{n\to+\infty} E\left[(X_n-a)^2\right] = 0$.