Chapitre IV

Approximation

(au sens des moindres carrés)

I/ Introduction : Soient

x_i	x_0	...	x_n
y_i	y_0		y_n

des données observées (issues d'experimentation) et considérons $\mathcal{F}$ une classe de fonctions ; Nous voulons trouver parmi toutes les fonctions de $\mathcal{F}$ celle qui représente au "mieux" les données (x_i, y_i)

Définition : Soient $(x_i, y_i)_{i=\overline{0,n}}$ des données observées, $\mathcal{F}$ une classe de fonctions $\mathcal{F} = \{ f, \text{ fonction} \}$; le meilleur approximant au sens des moindres carrés et l'élément f^* de $\mathcal{F}$ qui verifie :

$$\left[\sum_{i=0}^{n} (y_i - f^*(x_i))^2 \right]^{1/2} = \underset{f \in \mathcal{F}}{\mathrm{Min}} \left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \right)^{1/2}$$

ou encore $$\sum_{i=0}^{n} (y_i - f^*(x_i))^2 = \underset{f \in \mathcal{F}}{\mathrm{Min}} \left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \right)$$

En d'autres termes f^* vérifie

$$\sum_{i=0}^{n} (y_i - f^*(x_i))^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2 \quad \forall f \in \mathcal{F}$$

II/ Cas particuliers :

1/ Cas affine (linéaire)

Etant donné des points (x_i, y_i) ; quelle est la meilleure droite qui approche les points. En fait dans ce cas

$\mathcal{F} = \{ f(x) = ax+b \,;\, a,b \in \mathbb{R} \}$. et on cherche parmi toutes les fonctions (droites) de $\mathcal{F}$ celle qui minimise la quantité $$\sum_{i=0}^{n} (y_i - f(x_i))^2 = \sum_{i=0}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

Donc on cherche à minimiser la quantité

$$S(a,b) = S = \sum_{i=0}^{n} (a x_i + b - y_i)^2.$$

a cet effet il suffit de résoudre :

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases}$$

(ces équations sont appelées équations normales)

$$(\mathrm{I}) \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} 2x_i (a x_i + b - y_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} 2 (a x_i + b - y_i) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} x_i (a x_i + b - y_i) = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (a x_i + b - y_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) b = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a + (n+1)\, b = \sum_{i=0}^{n} y_i \end{cases}$$

Le dernier système est un système linéaires de deux équations à deux inconnues a et b qui peut être résolu par les méthodes déja étudiées.

<u>Exemple:</u> Soit le tableau

x_i	1	2	3
y_i	5	6	7

Trouver la droite qui approxime au sens des moindres carrés ces données (c'est la droite de régression). $\mathcal{F} = \{ f(x) = ax+b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$

Soit $S = \sum_{i=0}^{2} (ax_i + b - y_i)^2$ le but est de minimiser S par rapport à a et b. ie:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial a} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{2} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=0}^{2} x_i\right) b = \sum_{i=0}^{2} x_i y_i$$

$$0 = \frac{\partial S}{\partial b} \Leftrightarrow \left(\sum_{i=0}^{2} x_i\right) a + 3b = \sum_{i=0}^{2} y_i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 14a + 6b = 38 \\ 6a + 3b = 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = +4 \end{cases}$$

$f(x) = y = x + 4$. est la fonction droite recherchée.

2/ Cas polynomial :

On dispose de $(n+1)$ valeurs observées (x_i, y_i) $i=\overline{0,n}$ et on cherche un polynôme de degré $m<n$

Définition : On appelle polynôme aux moindres carrés $P_m^*(x)$ le polynome de degré m tel que :

$$\sum_{i=0}^{m} (y_i - P_m^*(x_i))^2 \leq \sum_{i=0}^{n} (y_i - P_m(x_i))^2 \quad \forall P_m \text{ polynôme de degré } m.$$

Construction de P_m^*.

On pose $P_m^*(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$. et on considère

$$S(a_0, a_1, \cdots, a_m) = S = \sum_{i=0}^{n} \left(y_i - P_m^*(x_i)\right)^2 = \sum_{i=0}^{n} \left(P_m^*(x_i) - y_i\right)^2$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right)^2.$$

Pour déterminer les coefficients du polynôme P^* il suffit de résoudre les équations :

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 0 \qquad 0 \leq k \leq m.$$

nous obtenons ainsi un système de $(m+1)$ équations à $(m+1)$ inconnues on trouve:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right) = 0$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} x_i \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_k} = 2\sum_{i=0}^{n} x_i^k \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right) = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_m} = 2\sum_{i=0}^{n} x_i^m \left(a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \cdots + a_m x_i^m - y_i\right) = 0$$

on obtient ainsi le système linéaire dans les inconnues $a_0, a_1, \dots a_m$.

$$\begin{cases}
(n+1)a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{m} x_i^m\right) a_m = \sum_{i=0}^{m} y_i \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^3\right) a_2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i \\
\vdots \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^k\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{k+1}\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{k+2}\right) a_2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+k}\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^k y_i \\
\vdots \\
\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^m\right) a_0 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+1}\right) a_1 + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{m+2}\right) a_2 + \cdots + \left(\sum_{i=0}^{n} x_i^{2m}\right) a_m = \sum_{i=0}^{n} x_i^m y_i
\end{cases}$$

$$A \cdot a = b$$

$$A = \begin{pmatrix} (n+1) & \sum x_i & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^{m+1} \\ \vdots & & & \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} ; \quad b = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^m y_i \end{pmatrix}$$

3/ Cas général :

Il n'est pas nécessaire de se limiter aux polynômes ; en effet considérons l'exemple suivant :

Exemple : on donne :

x_i	0,5	0,75	1	2,5	2	2,25	2,75	3
y_i	-1,19	-0,45	-0,07	0,71	1,16	1,44	1,72	1,84

Trouver le meilleur approximant au sens des moindres carrés parmi la classe de fonctions modèles $\mathcal{F} = \{a \ln x \; ; \; a \in \mathbb{R}\}$.

$$S(a) = \sum_{i=0}^{7} (a \ln x_i - y_i)^2 \; ; \text{ on cherche à minimiser } S$$

$$\frac{\partial S}{\partial a} = S'(a) = 2 \sum_{i=0}^{7} \ln x_i (a \ln x_i - y_i)$$

et on résout $\quad S'(a) = 0 \iff a \sum_i \ln^2 x_i - \sum_i y_i \ln x_i = 0$

$$\iff a = \frac{\sum_i y_i \ln x_i}{\sum_i \ln^2 x_i}$$

$a = 1,7$

$$\boxed{f^*(x) = 1,7 \ln x}$$