Théorème d'inversion locale:

Soit U un ensemble ouvert, de $\mathbb{R}^N$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^N$ une fonction de classe C^k $k \geq 1$; si un point $x^* \in U$ est tel que $Df(x^*)$ est inversible alors il existe un voisinage V de x^* $V \subset U$ tel que: $f: V \longrightarrow f(V)$ est inversible, et telle que f^{-1} est aussi de classe C^k.

Théorème de fonctions implicites:

Soit U un ouvert, dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ et soit $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k $(k \geq 1)$. Soit $(x^*, y^*) \in U$ (ie $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$) telle que $f(x^*, y^*) = c$. Si $D_y f(x^*, y^*)_{(n,n)}$ est inversible, alors il existe un ouvert $(x^*, y^*) \in V_m \times V_n \subset U$ et une unique fonction de classe C^k $\Psi: V_m \longrightarrow V_n$ telle que

$f(x, \Psi(x)) = c$ $\forall x \in V_m$. De plus $f(x, y) \neq c$ si $y \neq \Psi(x)$.

$\forall x \in V_m \ (f(x,y) = c \iff y = \Psi(x))$

et nous avons la formule de dérivation suivante:

$$D\Psi(x) = -\left[D_y f(x, \Psi(x)) \right]^{-1} D_x f(x, \Psi(x))$$

Exemple :

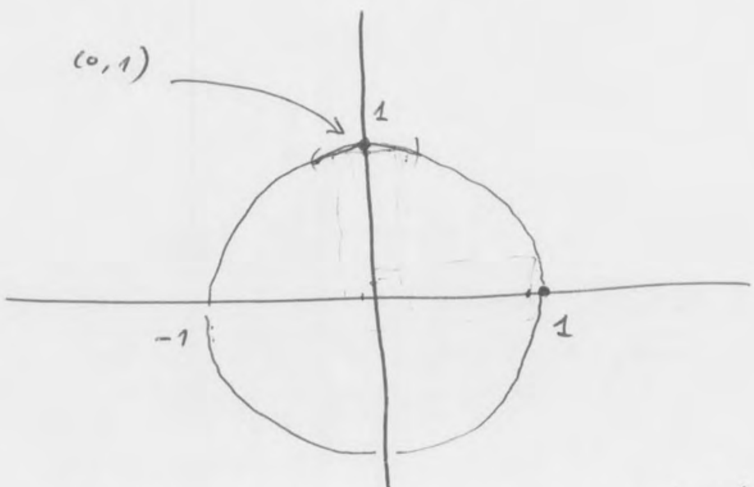
$$f(x,y) = x^2+y^2 \quad ; \quad f(x,y)=1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

• au point $(x^0, y^0) = (0,1)$ $\quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 2 \neq 0$.

Donc au voisinage de $(0,1)$ on peut exprimer y en fonction de x ; $y = \Psi(x)$, $f(x, \Psi(x)) = 1$.

• au point $(x^0, y^0) = (1,0)$ on a : $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$; le théorème des fonctions implicites ne s'applique pas.



en effet au voisinage de $(1,0)$ à chaque x correspond deux y $\quad (y = \Psi(x))$

Version simplifiée pour équation réelle. dimension 1.

Théorème des fonctions implicites.

Soit $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
$(\lambda, x) \longmapsto F(\lambda, x)$.

telle que $F(0,0) = 0$ et $\dfrac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$.

alors il existe $\delta > 0$ et $\eta > 0$ et une fonction Ψ de classe C^1.

$$\Psi : \{\lambda ; \|\lambda\| < \delta\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que $\Psi(0) = 0$ et $F(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda ; \|\lambda\| < \delta$.

de plus si pour $(\lambda_0, x_0) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ $\|\lambda_0\| < \delta$ et $|x_0| < \eta$ sont tels que $F(\lambda_0, x_0) = 0$ alors $x_0 = \Psi(\lambda_0)$.

Equation dans $\mathbb{R}$: $\quad \dot{x} = f(x)$

Les résultats qui vont être établis ont un aspect local et ne sont valable qu'au voisinage d'un point d'équilibre pour fixer le idées nous allons supposer que ce dernier est $x^* = 0$ $\qquad (f(x^*) = 0)$

1. Point d'équilibre Hyperbolique :

On s'interesse à $\dot{x} = f(x)$; avec f de classe C^1.

vérifiant $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$.

x^* est un point d'équilibre hyperbolique, dont la stabilité (local) peut être déduite par étude du signe de $f'(0)$

$$\dot{x} = f(0) + f'(0)x + o(x). \Rightarrow \dot{x} = f'(0)x + o(x).$$

Nous allons à présent perturber l'équation de départ, et condérons l'équation :

$$\dot{x} = F(\lambda, x).$$

où $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad (\lambda, x) \longmapsto F(\lambda, x)$ une fonction de classe C^1 telle que

$$F(0,x) = f(x) \; , \quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0) \neq 0.$$

Comme $\underset{= f(0)}{F(0,0) = 0}$ et $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0) \neq 0$ nous pouvons applique le théorème des fonctions implicites

Il existe alors des constants $\delta > 0$ et $\eta > 0$; une fonction Ψ de classe C^1; telle que $\Psi(0) = 0$ vérifiant

$$F(\lambda, \Psi(\lambda)) = 0.$$

de plus pour $\|\lambda\| < \delta$ et $|x| < \eta$ la seule solution de

$F(\lambda, x) = 0$ est donnée par $x = \Psi(\lambda)$.

Donc pour $|x| < \eta$ l'équation $\dot{x} = F(\lambda, x)$ possède un unique équilibre $x^* = \Psi(\lambda)$

pour étudier la nature de ce point d'équilibre étudions le signe de $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, x^*) = \frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \Psi(\lambda))$.

or on sait que $\Psi(0) = 0$ i.e. $\frac{\partial F}{\partial x}(0, \Psi(0)) = \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0)$.

Comme F est de classe C^1 il existe un $\delta > 0$ tel que pour $\|\lambda\| < \delta$ le signe de $\frac{\partial F}{\partial x}(\lambda, \Psi(\lambda))$ est le même que celui de $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0)$. donc pour λ proche de 0

l'équation perturbée $\dot{x} = F(\lambda, x)$ possède un point d'équilibre de même nature que 0 pour l'équation originale

$\dot{x} = f(x)$.

---

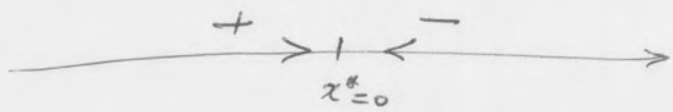
on dit l'équation est insensible par petit perturbation du champ de vecteurs

<u>Exemple 0</u> Considérons l'équation:

$\dot{x} = \lambda - x$. est une perturbation de $\dot{x} = -x$.

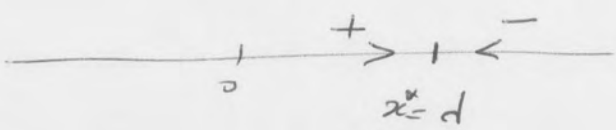
$f(x) = -x$, $\quad F(\lambda, x) = \lambda - x$. (un shift).

$\lambda = 0$ $\quad x = 0$ est un pt d'équilibre stable.

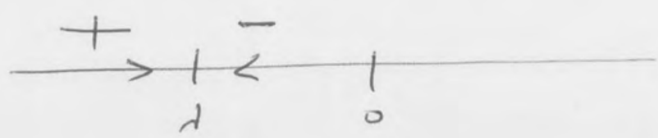


$f'(0) = -1 < 0$
stable

<u>$\lambda > 0$</u> $\quad x^* = \lambda$ pt d'équilibre $\Psi(\lambda) = \lambda$. stable



<u>$\lambda < 0$</u> $\quad x^* = \lambda$ pt d'équilibre stable $\Psi(\lambda) = \lambda$



Aucun changement — qualitatif ou quantitatif —

$F(0,0) = 0$, $\quad \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0) \neq 0$.

2. Equilibre non-hyperbolique avec dégénérescence quadratique:

On considère toujours l'équation dans $\mathbb{R}$

$$\dot{x} = f(x) \quad \text{avec cette fois- } f \text{ de Classe } C^2$$

vérifiant $f(0)=0$, $f'(0)=0$ et $f''(0) \neq 0$.

$x^* = 0$ est donc un point non hyperbolique, la linéarisation ne donne aucune information sur la stabilité des pt d'équilibre.

Considérons alors l'équation perturbée

$$\dot{x} = F(\lambda, x).$$

où $\begin{array}{l} F: \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\lambda, x) \longmapsto F(\lambda, x) \end{array}$ est une fonction de classe C^2 vérifiant:

$$\underline{F(0,x) = f(x)}; \quad \left[\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = f'(0) = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = f''(0) \neq 0 \right]$$

(donc $F(0,0) = 0$).

le développement de Taylor de F au voisinage de l'origine donne:

$$F(\lambda, x) = a(\lambda) + b(\lambda)x + C(\lambda)\frac{x^2}{2} + G(\lambda, x)$$

$a(0) = 0$; $b(0) = 0$; $C(0) = f''(0) \neq 0$.

et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0, \eta > 0$; $\|\lambda\| < \delta$ et $|x| < \eta \Rightarrow |G(\lambda, x)| < \varepsilon |x|^2$.

Considérons $H(\lambda, x) = \dfrac{\partial F(\lambda, x)}{\partial x}$ par les propriétés de F

$H(0,0) = 0 \qquad \dfrac{\partial H}{\partial x}(0,0) = f''(0) \neq 0.$

On peut donc appliquer le théorème des fonctions implicites à H.

Donc il existe un $\delta > 0$, $\eta > 0$, une fonction Ψ de classe C^1,

définie pour $\|x\| < \delta$; telle que $\Psi(0) = 0$, et $H(d, \Psi(d)) = 0$.

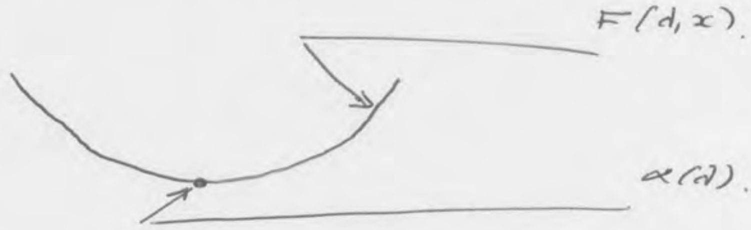
i.e. $\dfrac{\partial F}{\partial x}(d, \Psi(d)) = 0$. $\left(\text{et } \dfrac{\partial F}{\partial x}(d,x) = 0 \text{ pour } \|d\| < \delta \text{ et } |x| < \eta \Rightarrow x = \Psi(d)\right)$.

Donc pour chaque d fixé la fonction $F(d,x)$ possède un extrémum

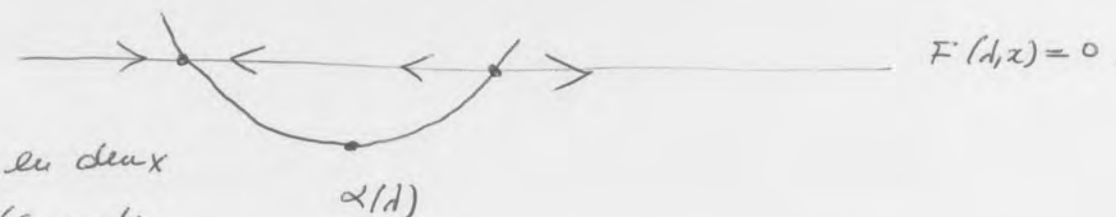
en $x = \Psi(d)$; Posons $\alpha(d) = F(d, \Psi(d))$ la valeur extrémale de F.

<u>1er Cas</u> $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = f''(0) > 0$

Donc F est convexe (au voisinage de $x = 0$ $|x| < \eta$). et $(d, \Psi(d))$ est un minimum ; donc $F(d,x)$ a l'aspect suivant



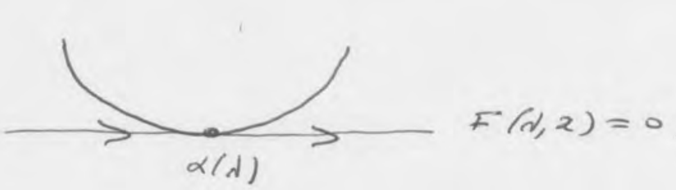
Si $\alpha(d) < 0$.



$F(d,x)$ s'annule en deux points donc l'équation

$\dot{x} = F(d,x)$ possède deux points d'équilibre dans $|x| < \eta$

Si $\alpha(d) = 0$



$F(d,x)$ s'annule en un unique point donc l'équation $\dot{x} = F(d,x)$ possède un unique point d'équilibre (non hyperbolique).

Si $\alpha(\lambda) > 0$

$F(\lambda, x)$ ne s'annule pas (au voisinage de $x=0$).

pas de point d'équilibre au voisinage de l'origine.

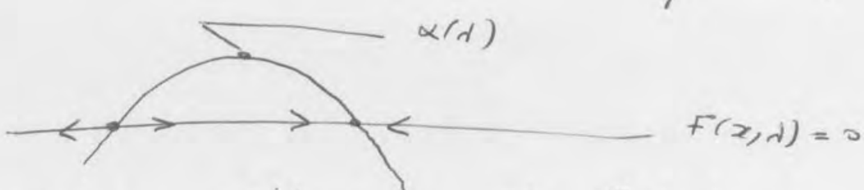
<u>2ème</u> Cas $\underline{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0)} = f''(0) \underline{< 0}$.

Dans ce cas F est concave (au voisinage de $x=0$) et $(\lambda, \Psi(\lambda))$ est un maximum la même étude précédente peut être reprise il suffit d'inverser les cas.

- si $\alpha(\lambda) < 0$; $F(\lambda, x)$ ne s'annule pas ; inexistence de point d'équilibre au voisinage de l'origine.

- Si $\alpha(\lambda) = 0$; $((\lambda, \Psi(\lambda)))$ $F(\lambda, x)$ s'annule en un seul point $\dot{x} = F(\lambda, x)$ possède un seul point d'équilibre non-hyperbolique.

- Si $\alpha(\lambda) > 0$



$F(\lambda, x)$ s'annule en deux points ; l'équation $\dot{x} = F(\lambda, x)$ possède deux points d'équilibre au voisinage de l'origine.

On peut résumer tous les cas de la manière suivante : $\dot{x} = F(\lambda, x)$

- Si $\alpha(\lambda) f''(0) < 0$ apparition de deux points d'équilibre (hyperboliq)
- si $\alpha(\lambda) f''(0) > 0$ pas de points d'équilibre au voisinage de l'origine
- Si $\alpha(\lambda) = 0$ point d'équilibre non-hyperbolique.

(Revoir l'exemple 1 $\dot{x} = \alpha + x^2$).

Remarque : l'étude précedente est basée sur le signe d'une fonction $\alpha(\lambda)$ ($\alpha : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}$) fonction réelle (même si elle peut eventuellement dépendre de plusieurs paramètres λ_i).

l'étude qualitative de l'équation perturbée

$$\dot{x} = F(\lambda, x) \quad \text{dépend unique de } \alpha(\lambda).$$

On dit que le champ de vecteurs originale $f(x)$ est de Codimension 1.

Exemple :

$$\dot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 x + x^2. \qquad (\text{Eq originale } \dot{x} = x^2)$$

$$F(\lambda, x) = F(\lambda_1, \lambda_2, x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + x^2.$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow \lambda_2 + 2x = 0 \Rightarrow x = -\frac{\lambda_2}{2}.$$

$$\alpha(\lambda) = F\left(\lambda_1, \lambda_2, -\frac{\lambda_2}{2}\right) = \lambda_1 + \lambda_2\left(-\frac{\lambda_2}{2}\right) + \frac{\lambda_2^2}{4} = \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{4}.$$

Donc il y'a bifurcation si l'on n'est pas sur la courbe

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_2^2}{4}. \quad \text{Comme } \underline{\underline{f''(0) = 1}} > 0$$

il y'a deux points d'équilibre si $\alpha(\lambda) = \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{4} < 0$ ie $\lambda_1 < \frac{\lambda_2^2}{4}$.

et aucun point d'équilibre si $\alpha(\lambda) = \lambda_1 - \frac{\lambda_2^2}{4} > 0$ ie $\lambda_1 > \frac{\lambda_2^2}{4}$.

(Bifurcation en Codimension 1).

EXERCICE : exemple 2.10. page 46.

Retour sur l'exemple : $\dot{x} = d_1 + d_2 x + x^2$.

Cas particuliers.

- Si $d_2 = 0$ et d_1 varie nous obtenons $\dot{x} = d_1 + x^2$

  bifurcation saddle-node exemple 1

- Si $d_1 = 0$ et d_2 varie nous obtenons $\dot{x} = d_2 x + x^2$

  bifurcation transcritique exemple 2.

Posons $\cancel{x} = \cancel{y} - \frac{d_2}{2}$; l'équation devient :

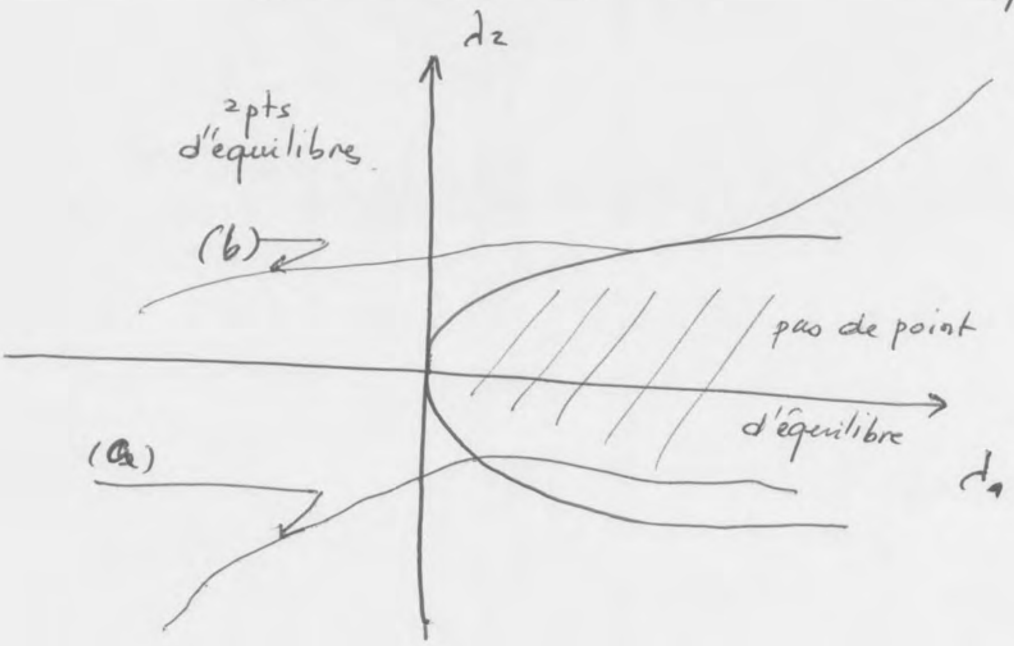
$x = y - d_2/2$.

$$\dot{y} = d_1 + d_2 (y - d_2/2) + (y - d_2/2)^2$$

$$\dot{y} = d_1 + d_2 y - \frac{d_2^2}{2} + y^2 - 2\frac{d_2}{2} y + \frac{d_2^2}{4}.$$

$$\dot{y} = \left(d_1 - \frac{d_2^2}{4}\right) + y^2.$$

On reconnait la forme $\dot{y} = d + y^2$. $d = d_1 - \frac{d_2^2}{4}$.



• Si l'on fait varier d_1 et d_2 suivant la Courbe (a)

on traverse complètement la courbe $d_1 = \frac{d_2^2}{4}$.

on passe de 2 pt d'équilibre à ~~0~~ pt d'équilibre

on a une bifurcation saddle node

• Si l'on fait varier d_1 et d_2 suivant la courbe.

(b) qui est tangente à la courbe $d_1 = \frac{d_2^2}{4}$ mais ne la traverse pas. ie $(d_1 - \frac{d_2^2}{4})$ atteint zéro sur la courbe (b) mais ne change pas de signe (Cas de figure qui peut être illustré par $\underline{\underline{d_1 = 0}}$) on a alors une bifurcation transcritique

---

En pratique la bifurcation saddle node est plus fréquente que la bifurcation transcritique

$$\dot{x} = d_1 + d_2 x + d_3 x^2$$

faisons un changement d'échelle temporelle ; $T = \gamma t$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dT} \cdot \frac{dT}{dt} = \gamma \frac{dx}{dT} = d_1 + d_2 x + d_3 x^2. \qquad d_3 \neq 0.$$

$$\frac{dx}{dT} = \dot{x} = \frac{d_1}{\gamma} + \frac{d_2}{\gamma} x + \frac{d_3}{\gamma} x^2.$$ l'équation dans la nouvelle échelle de temps.

posons $\gamma = + d_3$

$$\dot{x} = + \frac{d_1}{d_3} + \frac{d_2}{d_3} + x^2.$$ on retrouve la forme de l'exemple précédent.

donc avoir un terme <u>non nul</u> devant x^2 ne "change" pas l'équation

$F(d, x)$ $\qquad F(0,0) = 0 \; , \; \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0.$

faisons un developpement de Taylor de F.

$$F(d,x) = F(0,0) + x \frac{\partial F}{\partial x}(0,0) + d \frac{\partial F}{\partial d}(0,0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) + x d \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial d}(0,0)$$

$$+ \frac{d^2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial d^2}(0,0) + \dots$$

$$= \left[d \frac{\partial F}{\partial d}(0,0) + O(d^2) \right] + x \left[d \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial d}(0,0) \right] + x^2 \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \right]$$

$$= \quad d_1 + d_2 x + d_3 x^2 + \dots$$

On peut résumer quelques cas :

$\dot{x} = F(\lambda, x)$. une perturbation régulière de $\dot{x} = f(x)$ avec $f(0) = 0$, $F(0,x) = f(x)$, $F(0,0) = 0$.

- Si $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) \neq 0$ (ou $f'(0) \neq 0$) point fixe (point d'équilibre) hyperbolique le système est structurellement stable (insensible au perturbation).

- Si $\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0$ il y'a plusieurs possibilité parmi lesquelles :

  - $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) \neq 0$ et $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0,0) \neq 0$. on a une bifurcation saddle - node.

  - $\frac{\partial F}{\partial \lambda}(0,0) = 0$ le cas le plus simple est une bifurcation transcritique

  - $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0$ le cas le plus simple est une bifurcation Pitchfork

3. Equilibre non hyperbolique avec dégénérescence cubique:

On considère l'équation $\dot{x} = f(x)$.

f est supposée de classe C^3; telle que:

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0 \quad \text{et} \quad f'''(0) \neq 0.$$

$x^* = 0$ est donc un point d'équilibre non hyperbolique

Considérons l'équation perturbée

$$\dot{x} = F(\lambda, x)$$

où $F : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\lambda, x) \longmapsto F(\lambda, x)$ est une fonction de classe C^3

vérifiant: $F(0,x) = f(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) = 0, \quad \frac{\partial^3 F}{\partial x^3}(0,0) = f'''(0) \neq 0. \quad (*)$$

---

* Exemple de perturbation: Prenant comme exemple de F. le cas suivant

$$= F(\lambda, x) = \lambda_1 + \lambda_2 x + c(\lambda)\frac{x^2}{2} + d(\lambda)\frac{x^3}{6} + G(\lambda, x) = F(\lambda_1, \lambda_2, x).$$

alors: pour être dans les conditions (*) il est nécessaire que:

$$c(0) = 0, \quad \text{et} \quad d(0) = f'''(0) \neq 0.$$

et pour chaque $\varepsilon > 0$, on peut choisir $\delta > 0$, $\eta > 0$ telle que $\|G(\lambda, x)\| \leq \varepsilon |x|^3$ pour $\|\lambda\| < \delta$ et $|x| < \eta$.

La bifurcation a lieu si

$$(S)\begin{cases} F(\lambda,x)=0 \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}(\lambda,x)=0. \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1+\lambda_2 x + C(\lambda)\frac{x^2}{2}+d(\lambda)\frac{x^3}{6}+G(\lambda,x)=0. \\ \lambda_2 + C(\lambda)x + d(\lambda)\frac{x^2}{2} + \dfrac{\partial G}{\partial x}(\lambda,x)=0. \end{cases}$$

Dans la deuxième équation posons:

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(\lambda,x)= H(\lambda_1,x,\lambda_2) = \lambda_2 + C(\lambda)x + d(\lambda)\frac{x^2}{2}+\frac{\partial G}{\partial x}(\lambda,x).$$

Le réarrangement nous permet de considérer (λ_1,x) comme paramètre et λ_2 comme variable

$$H((0,0),0)=0 \qquad \frac{\partial H}{\partial \lambda_2}(0,0,0) = 1 \neq 0.$$

On peut donc appliquer le théorème des F.I. à H.

$H(\lambda_1,x,\lambda_2)=0$ a pour solution $H(\lambda_1,x,\varphi_2(\lambda_1,x))=0$

$(\lambda_2=\varphi_2(\lambda_1,x))$.

φ_2 étant de même régularité que H i.e. C^2.

$$\varphi_2(\lambda_1,0)=0 \quad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x}(0,0)=0, \quad \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}(0,0)=-d(0)\neq 0.$$

Donc $\varphi_2(\lambda_1,x) = C(\lambda_1)x + D(\lambda_1)\frac{x^2}{2}+\cdots$

$$C(0)=0. \qquad D(0) = -f'''(0)\neq 0.$$

Revenons à présent à l'équation -1- du système (S)

$$J(x,\lambda_1)= \lambda_1 + \varphi_2(\lambda_1,x)x + C(\lambda_1,\varphi_2(\lambda_1,x))\frac{x^2}{2}+d(\lambda_1,\varphi_2(\lambda_1,x))\frac{x^3}{6}+G(\lambda_1,\varphi_2(\lambda_1,x),x)=0$$

$J(x,\lambda_1)=$

$$J(0,0)=0, \quad \frac{\partial J}{\partial \lambda_1}(0,0)=1\neq 0.$$

On peut donc appliquer le Théorème des F.I à J.

pour $|x|<\eta$ et $|d_1|<\delta_1$.

$J(x, d_1) = 0 \Leftrightarrow d_1 = \varphi_1(x)$; et φ_1 est de même régularité

que J. i.e. φ_1 est de classe C^3.

$$J(x, \varphi_1(x)) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(x) + \varphi_2(\cdot)\cdot x + c(\cdot)\frac{x^2}{2} + d(\cdot)\frac{x^3}{6} + G(\cdot) = 0.$$

$\varphi_1(0) = 0$, $\varphi_1'(0) = 0$, $\varphi_1''(0) = 0$, $\varphi_1'''(0) = 2f'''(0)$.

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{3}f'''(0)\frac{x^3}{3} + \cdot$$

$$d_1(x) = \varphi_1(x) = \tfrac{1}{3}f'''(0)x^3 + -$$

$$d_2(x) = \varphi_2(\varphi_1(x), x)) = -\frac{1}{2}f'''(0)x^2$$

donc "$\overset{=}{\text{approximativement}}$" on retrouve :

$$d_2^3 = -\frac{1}{8}\left(f'''(0)\right)^3 x^6 \Rightarrow \underline{d_2^3} = -\frac{9}{8}\underline{f'''(0)}\,\underline{d_1^2}.$$

$$d_1^2 = \frac{1}{9}\left(f'''(0)\right)^2 x^6.$$

Si $f'''(0) < 0$ on retrouve l'exemple Cusp (fronce)

Exemple:

$$\dot{x} = \mu_1 + \mu_2 + (\mu_2 + \mu_1^3)x + \mu_1 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$

$$\lambda_1 = \mu_1 + \mu_2 \quad , \quad \lambda_2 = \mu_2 + \mu_1^3.$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3\mu_1^2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \det J_{(0,0)} = 1.$$

μ et uniquement défini

$$\dot{x} = \lambda_1 + \lambda_2 x + C(\lambda) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}.$$