Chapitre III Couples de variables aléatoires.

I. Le cas discret :

Définition : Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même ensemble fondamental Ω. Le couple (X, Y) est appelé couple de variables aléatoires.

La loi du couple (X, Y) (ou loi conjointe) est la donnée des probabilités :

$$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i \text{ et } Y = y_j)$$
$$= P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}).$$

Lorsque cela est possible (le cas fini) il est souvent pratique de donner cette loi sous forme de tableau (appelé tableau de contingence)

Exemple : On lance deux dés ; on note X le plus grand (au sens large) des deux chiffres obtenus et Y le plus petit (au sens large) des deux chiffres obtenus. Donner la loi conjointe du couple (X, Y).

X et Y prennent leurs valeurs dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

ainsi $X = x_i = i \quad i = 1, \dots 6$

$Y = y_j = j \quad j = 1, \dots 6.$

$Y \backslash X$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$	$x_5 = 5$	$x_6 = 6$	$P(Y=y_j)$
$y_1 = 1$	$1/36$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$P_{.1}$ $11/36$
$y_2 = 2$	0	$1/36$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$P_{.2}$ $9/36$
$y_3 = 3$	0	0	$1/36$	$1/18$	$1/18$	$1/18$	$P_{.3}$ $7/36$
$y_4 = 4$	0	0	0	$1/36$	$1/18$	$1/18$	$P_{.4}$ $5/36$
$y_5 = 5$	0	0	0	0	$1/36$	$1/18$	$P_{.5}$ $3/36$
$y_6 = 6$	0	0	0	0	0	$1/36$	$P_{.6}$ $1/36$
$P(X=x_i)$	$1/36$ $P_{1.}$	$3/36$ $P_{2.}$	$5/36$ $P_{3.}$	$7/36$ $P_{4.}$	$9/36$ $P_{5.}$	$11/36$ $P_{6.}$	

Remarques:

- On peut avoir $P(X=x_i, Y=y_j)=0$ même si $P(X=x_i)\neq 0$ et $P(Y=y_j)\neq 0$.
- $\sum_{i,j} P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_{i,j} P_{ij} = 1$

Définition Les lois marginales de X et Y sont données par:

$$p_{i.} = P(X=x_i) = \sum_j P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_j P_{ij}$$

$$P_{.j} = P(Y=y_j) = \sum_i P(X=x_i, Y=y_j) = \sum_i P_{ij}$$

Remarques:

- On déduit les lois marginales à partir de la loi du couple.

  Il n'est pas en général possible de déduire la loi conjointe, si on connait les lois marginales.

- $\sum_i P_{i.} = \sum_j P_{.j} = 1$

Définition:

La loi conditionnelle de $X = x_i$ sachant que $Y = y_j$ est donnée par:

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P_{ij}}{P_{.j}} = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)} = \frac{P(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})}{P(\{Y = y_j\})}$$

Exemple: $P(X=3 / Y=2) = \dfrac{P(X=3, Y=2)}{P(Y=2)} = \dfrac{\frac{1}{18}}{\frac{9}{36}} = \dfrac{1}{18} \times \dfrac{36}{9} = \dfrac{2}{9}$.

Remarque: il est nécessaire d'avoir $P_{.j} \neq 0$ pour définir cette loi conditionnelle.

Définition: Les deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes ssi $\forall i, \forall j$, $P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i) \cdot P(Y = y_j)$.

ou encore $\forall i, \forall j$: $P_{ij} = P_{i.} \cdot P_{.j}$

Définition: On appelle fonction de répartition de couple (X, Y) la fonction $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$.

Définition l'espérance de X est donnée par

$$E(X) = \sum_i x_i P_{i.}$$

l'espérance de Y est donnée par

$$E(Y) = \sum_j y_j \cdot P_{.j}$$

Remarque: Si X et Y sont $\overline{\text{indépendants}}$ alors

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)$$

la réciproque est généralement fausse.

Définition : La variance de X notée $V(X)$ est donnée par la formule classique $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ et l'écart type $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$

idem pour $V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$ " " $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)}$.

la Covariance de X, Y est donnée par

$$Cov(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$
$$= E(XY) - E(X).E(Y).$$

Le nombre réel $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ est appelé coefficient de corrélation de X et Y.

Propriétés :

1. $-1 \leq \rho \leq +1$.

2. X et Y indépendants $\Longrightarrow Cov(X,Y) = 0$ (la réciproque n'est pas toujours vraie)

3. X et Y indépendants $\Longrightarrow V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ (la réciproque n'est pas toujours vraie).

4. X et Y indépendants $\Longrightarrow \rho = 0$ ——

5. $V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,Cov(X,Y)$.

6- Si $|\rho| = 1$ X et Y sont en corrélation linéaire $Y = aX + b$.

Exercice 1

On jette deux dé ; soit X et Y les variables aléatoires représentants les chiffres obtenus du premier et du deuxième dé respectivement.

1- Donner la loi conjointe et lois marginales.

2- Donner la loi de $Z = X+Y$.

3- Par deux méthodes calculer $E(Z)$.

Solution

1-

$Y \backslash X$	1	2	3	4	5	6	
1	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$P_{.1} = 1/6$
2	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$P_{.2} = 1/6$
3	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$P_{.3} = 1/6$
4	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$P_{.4} = 1/6$
5	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$P_{.5} = 1/6$
6	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$1/36$	$P_{.6} = 1/6$
	$P_{1.} = 1/6$	$P_{2.} = 1/6$	$P_{3.} = 1/6$	$P_{4.} = 1/6$	$P_{5.} = 1/6$	$P_{6.} = 1/6$	

2- Z prend les valeurs $\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

$P(Z=2) = P(X=1, Y=1) = 1/36$

$P(Z=3) = P(X=1, Y=2) + P(X=2, Y=1) = 2/36$

$P(Z=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=1) = 3/36$

$P(Z=5) = 4/36$, $P(Z=6) = 5/36$, $P(Z=7) = 6/36$, $P(Z=8) = 5/36$

$P(Z=9) = 4/36$, $P(Z=10) = 3/36$, $P(Z=11) = 2/36$, $P(Z=12) = 1/36$

3. $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

$$= \frac{21}{6} + \frac{21}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

ou bien $E(Z) = \sum p_i z_i = \left(\frac{2}{36} + 3\times\frac{2}{36} + 4\times\frac{3}{36} + \cdots + 12\times\frac{1}{36}\right)$.

$$= 7.$$

<u>Exercice 2</u>: Soient X, Y deux ~~v~~ariables indépendants suivant des lois de Poisson de paramètre respectifs λ et μ.

Donner la loi de $Z = X+Y$.

<u>Solution</u>:

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

$$P(Y=\ell) = \frac{\mu^\ell e^{-\mu}}{\ell!}$$

$$P(Z=m) = P(X+Y=m) = \sum_{k=0}^{m} P(X=k)P(Y=m-k)$$ indépendants

$$= \sum_{k=0}^{m} P(X=k, Y=m-k)$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\mu^{m-k} e^{-\mu}}{(m-k)!}$$

$$= e^{-(\lambda+\mu)} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!(m-k)!} \lambda^k \cdot \mu^{m-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{m!} \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \lambda^k \mu^{m-k}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda+\mu)}}{m!} \sum_{k=0}^{m} C_m^k \lambda^k \mu^{m-k}$$ (formule du binôme)

$$P(Z=m) = \frac{(\lambda+\mu)^m e^{-(\lambda+\mu)}}{m!}$$

$Z \rightsquigarrow P(\mu+\lambda)$.

II Le cas (absolument) continu.

On peut reproduire toutes les notions précédentes au cas continu avec des modifications nécessaires.

Définition:

Un couple de variable aléatoires (X,Y) est dit continu s'il existe une fonction $f(x,y)$ dite densité de probabilité telle que:

- $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1.$

La Fonction de répartition du couple (X,Y) est donnée par:

$$F(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dv\,du$$

et on a donc $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}$

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_{a}^{b}\int_{c}^{d} f(x,y)\,dy\,dx$$

Les densités marginales de X et Y sont données par:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy \quad \text{et} \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

Les fonctions de répartition marginales

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt \quad \text{et} \quad F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)\,dt$$

<u>Définition</u>: les v.a. X,Y sont dite indépendante si pour tous intervalles I, J on a : $P(X\in I,\ Y\in J) = P(X\in I).P(Y\in J)$.

En d'autre termes $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$P(X\leq x,\ Y\leq y) = P(X\leq x).P(Y\leq y).$$

ou encore $F(x,y) = F_X(x).F_Y(y)$

ou encore $f(x,y) = f_X(x).f_Y(y)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x,y)\,dx\,dy \quad , \quad E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad , \quad V(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2$$

$$Cov(X,Y) = E\left[(X-E(X))(Y-E(Y))\right]$$

$$= E(XY) - E(X).E(Y).$$

$$E(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy\, f(x,y)\,dx\,dy.$$

Les propriétés enoncées dans le cas discret restent valables dans le cas continu.

Exercices.

I. Cas discret :

Ex 1 :

Soit X une V.a. discrète dont la loi est donnée par :

$x_k = k$	-2	-1	0	1	2
$P_k = P(X = x_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$

1. On note $Y = X^2$. Déterminer la loi de Y ainsi que celle du couple (X, Y).

2. ~~X~~ et Y sont-elles indépendants ?

3. Calculer $Cov(X, Y)$.

Solution

$Y = X^2$ donc Y prend ses valeurs dans $\{0, 1, 4\}$.

y_k	0	1	4
$P_k = P(Y = y_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

$X \backslash Y$	0	1	4
-2	0	0	$\frac{1}{6}$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0
0	$\frac{1}{6}$	0	0
1	0	$\frac{1}{4}$	0
2	0	0	$1/6$.

2. On remarque que $P(X = 1, Y = 0) = 0$, $P(X = 1) = \frac{1}{4}$, $P(Y = 0) = \frac{1}{6}$.

Donc X et Y ne sont pas indépendants.

3. $Cov(X,Y) = E(XY) - E[X]E[Y]$

$$E[X] = -2\times\frac{1}{6} + (-1)\frac{1}{4} + 0\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{4} + 2\times\frac{1}{6} = 0.$$

$$E[Y] = 0\times\frac{1}{6} + 1\times\frac{1}{2} + 4\times\frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Pour calculer $E[XY]$ on donne la loi de $Z = XY$.

$Z = z_k$	-8	-1	0	1	8
$P(Z=z_k)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$.

$$E[Z] = E[XY] = -8/6 + -1/4 + 0\times 1/6 + 1/4 + 8/6 = 0.$$

$E[XY] - E[X]E[Y] = 0$

ainsi $Cov(X,Y) = 0$ mais X et Y ne sont pas indépendants.

On dit que X et Y sont non-corrélés

Ex2 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendants.

On pose $U = max(X,Y)$, $V = min(X,Y)$.

Déterminer les fonctions de répartition de U et V en fonction de celles de X et Y.

Solution :

$U = \max(X, Y)$ et notons F_U sa fonction de répartition :

On a donc :

$$F_U(t) = P(U \leq t) = P(\max(X,Y) \leq t)$$
$$= P(X \leq t \text{ et } Y \leq t)$$
$$= P(X \leq t) \cdot P(Y \leq t) \qquad X \text{ et } Y \text{ sont indépendants.}$$
$$= F_X(t) \cdot F_Y(t).$$

$V = \min(X, Y)$. et notons F_V sa fonction de répartition

On a donc : $F_V(t) = P(V \leq t) = P(\min(X,Y) \leq t)$

$$= 1 - P(\min(X,Y) > t)$$
$$= 1 - P(X > t \text{ et } Y > t)$$
$$= 1 - P(X > t) P(Y > t) \qquad X \text{ et } Y \text{ sont indépendants.}$$
$$= 1 - (1 - P(X \leq t))(1 - P(Y \leq t))$$
$$= 1 - (1 - F_X(t))(1 - F_Y(t))$$
$$= F_X(t) + F_Y(t) - F_X(t) \cdot F_Y(t).$$

Ex3: Soit X, Y deux variables aléatoirs à valeurs dans $\mathbb{N}$.

telles que : $\forall i,j \in \mathbb{N},\ P_{ij} = P(X=i, Y=j) = \dfrac{c}{2^{i+1}\, j!}$

1. Déterminer la valeur de c.

2. Montrer que X et Y sont indépendants.

3. En déduire la valeur de $Cov(X,Y)$.

Solution :

1. Il est nécessaire d'avoir $\displaystyle\sum_{i,j} P_{ij} = 1$

ains $$\sum_{i,j} P(X=i, Y=j) = \sum_i \sum_j \frac{c}{2^{i+1} j!}$$
$$= c \sum_i \frac{1}{2^{i+1}} \cdot \sum \frac{1}{j!}$$
$$= \frac{c}{2}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \cdot e$$
$$= c.e.$$

$\Rightarrow c = \frac{1}{e} = e^{-1}$.

2. Déterminons les lois marginals de X et Y.

$$P_{i\cdot} = \sum_j P_{ij} = \sum_j \frac{e^{-1}}{2^{i+1} \cdot j!} = \frac{e^{-1}}{2^{i+1}} \sum_j \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

$$P_{\cdot j} = \sum_i P_{ij} = \sum_i \frac{e^{-1}}{2^{i+1} j!} = \frac{e^{-1}}{j!} \sum_i \frac{1}{2^{i+1}} = \frac{e^{-1}}{2\, j!} \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{e^{-1}}{j!}$$

ainsi $\forall i j \quad P_{ij} = P_{i\cdot} \cdot P_{\cdot j} = \dfrac{e^{-1}}{2^{i+1} j!}$

Donc X et Y sont indépendants.

3- $Cov(X,Y) = 0$ car X et Y sont indépendants.

<u>Cas Continu</u>

<u>Ex1</u>:

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \alpha(x+y) & \text{si } (x,y) \in]0,1[\times]0,1[\\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

une d.d.p d'un couple aléatoire (X,Y)

1- Trouver la valeur de α ?

2- Calculer la covariance $Cov(X,Y)$.

3- Calculer ρ le coefficient de corrélation.

<u>Solution</u>:

1- $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \alpha \int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy = 1$

$$\Rightarrow \alpha \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 dx = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = 1$$

$$\Rightarrow \alpha \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}x\right]_0^1 = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha = 1.$$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y) & 0 < x < 1 \text{ et } 0 < y < 1 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

2- $Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$.

Calculons les densités marginales.

$$f_X(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 (x+y)\,dy = \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^1 = x + \frac{1}{2}.$$

$$f_Y(y) = y + \frac{1}{2}.$$

- $E[X] = \int_0^1 x f_X(x,y)\,dx = \int_0^1 (x^2 + 1/2\, x)\,dx = \left[1/3\, x^3 + \frac{1}{4} x^2 \right]_0^1$

$E[X] = \frac{7}{12}$

$E[Y] = \frac{7}{12}$.

- $E[XY] = \int_0^1 \int_0^1 xy\, f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^1 xy\,(x+y)\,dx\,dy$

$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2 y + xy^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left[x^2 \frac{y^2}{2} + x \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx.$

$= \int_0^1 \left(x^2/2 + x/3 \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y]$

$Cov(X,Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \times \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}$

3- $\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \; \sigma_Y}$.

$V(X) = E[X^2] - E[X]^2$

$E[X^2] = \int_0^1 x^2 f_X(x)\,dx = \int_0^1 x^2 (x + \frac{1}{2})\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{6} x^3 \right]_0^1$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

$V(X) = \frac{5}{12} - \left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{60-49}{144} = \frac{11}{144}$.

$V(Y) = \frac{11}{144}$.

$\rho = \frac{-\frac{1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}} \times \sqrt{\frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}$.

Exercice 2:

Soit $f(x,y) = c\,xy\,e^{-x^2-y^2}$ $\quad x \geq 0,\ y \geq 0.$

1- Déterminer c pour que f soit la densité de probabilité d'un couple de variables aléatoires (X,Y).

2- Calculer $F(x,y)$ la fonction de répartition du couple (X,Y).

3- Calculer les densités marginales.

4- Calculer les fonctions de répartition marginales.

Solution:

1- c doit être positif.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = c\int_{0}^{+\infty} x e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} y e^{-y^2} dy = \frac{1}{4} c \left[e^{-x^2}\right]_0^{+\infty} \left[e^{-y^2}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{c}{4} = 1 \Rightarrow c = 4.$$

$f(x,y) = 4xy\,e^{-x^2-y^2}$ $\quad x \geq 0,\ y \geq 0$ est une d.d.p d'un couple (X,Y).

2- $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv \quad \text{pour } x>0,\ y>0$$

$$= 4\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} uv\,e^{-u^2-v^2}\,du\,dv = \int_0^x -2u e^{-u^2} du \int_0^y -2v e^{-v^2} dv$$

$$= \left[e^{-u^2}\right]_0^x \left[e^{-v^2}\right]_0^y = (1-e^{-x^2})(1-e^{-y^2})$$

$$= (e^{-x^2}-1)(e^{-y^2}-1).$$

3. $$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^{+\infty} 4xy\,e^{-x^2-y^2} dy = -2xe^{-x^2}\int_0^{+\infty} -2y e^{-y^2} dy$$

$$= -2xe^{-x^2}\left[e^{-y^2}\right]_0^{+\infty} = 2xe^{-x^2}.$$

de même $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = 2ye^{-y^2}.$

4. Fonctions de répartition marginals.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 2t e^{-t^2} dt = \int_0^x 2t e^{-t^2} dt = -\left[e^{-t^2}\right]_0^x$$

$$= \left(1 - e^{-x^2}\right) \qquad x \geqslant 0$$

$$F_Y(y) = \left(1 - e^{-y^2}\right) \qquad y \geqslant 0.$$

EXERCICE 3:

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \alpha \sin(x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2 \ , 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

la d.d.p d'un couple de v.a (X,Y).

1- Trouver α.

2- Calculer $E(X)$, $E(Y)$, $V(X)$, $V(Y)$.

3- Donner la matrice de covariance.

Solution:

1. $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \alpha \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha \int_0^{\pi/2} \Big[-\cos(x+y)\Big]_0^{\pi/2} dx = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha \int_0^{\pi/2} \Big[-\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) + \cos x\Big] dx = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha \Big[-\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) + \sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

$$\Rightarrow \alpha \big[1+1\big] = 1 \Rightarrow \alpha = 1/2.$$

$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin(x+y) & \text{si } 0 \leq x \leq \pi/2,\ 0 \leq y \leq \pi/2 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$

2. $$E(X) = \int_0^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{+\frac{\pi}{2}} x\,\frac{\sin(x+y)}{2}\,dx\,dy = 1/2 \int_0^{\pi/2} x \int_0^{\pi/2} \Big[\sin(x+y)\,dy\Big] dx$$

$$= 1/2 \int_0^{\pi/2} x \Big[-\cos(x+y)\Big]_0^{\pi/2} dx = 1/2 \int_0^{\pi/2} x\left(-\cos(x+\tfrac{\pi}{2}) + \cos x\right) dx.$$

Par parties $\begin{cases} f = x \longrightarrow f' = 1 \\ g' = -\cos(x+\pi/2) + \cos x \longrightarrow g = -\sin(x+\pi/2) + \sin x \end{cases}$

$$E(X) = 1/2 \left\{ \Big[x\big(\sin x - \sin(x+\tfrac{\pi}{2})\big)\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \left(\sin(x+\tfrac{\pi}{2}) - \sin x\right) dx \right.$$

$$E(X)=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+\left[-\cos(x+\pi/2)+\cos x\right]_0^{\pi/2}\right]$$

$$E(X)=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}+[1-1]\right]=\pi/4$$

Donc $E(X)=\pi/4$

et Par symétrie car $f(x,y)=f(y,x)$ on a:

$$E(Y)=\pi/4.$$

$$E(X^2)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}x^2\sin(x+y)\,dx\,dy$$

après deux intégrations par partis. on trouve

$$E(x^2)=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2.$$

Donc $V(X)=E[X^2]-(E(X))^2=\frac{\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}-2-\frac{\pi^2}{16}$

$$V(X)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2$$

et Par symétrie $V(Y)=\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2.$

3- la matrice de covariance est donnée par $\begin{pmatrix} V(X) & Cov(X,Y) \\ Cov(Y,X) & V(Y)\end{pmatrix}$

Il suffit de calculer $Cov(X,Y)$ $(=Cov(Y,X))$

$$Cov(X,Y)=E[XY]-E[X]E[Y].$$

Il reste à calculer $E(XY)=\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}xy\sin(x+y)\,dx\,dy.=\frac{\pi}{2}-1.$

ainsi $Cov(X,Y)=\pi/2-1-\frac{\pi^2}{16}.$

Donc la matrice de covariance est donnée par $\begin{pmatrix}\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2 & -\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-1 \\ -\frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-1 & \frac{\pi^2}{16}+\frac{\pi}{2}-2\end{pmatrix}$

Exercice 4

Deux V.a indépendants X, Y ont pour d.d.p respective

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \end{cases} \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } y<0 \\ \mu e^{-\mu y} & \text{si } y>0 \end{cases}$$

1- Trouver la d.d.p du couple (X,Y).

2- Donner la F.d.r du couple (X,Y).

Solution:

1- Comme X et Y sont indépendantes

$$f(x,y) = f_1(x)\cdot f_2(y) = \begin{cases} \lambda\cdot\mu\, e^{-(\lambda x+\mu y)} & \text{si } x>0 \text{ et } y>0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

2- $$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \int_0^x\int_0^y \lambda\cdot\mu\, e^{-(\lambda u+\mu v)}\,du\,dv$$

$$= \int_0^x \lambda e^{-\lambda u}\,du \int_0^y \mu e^{-\mu v}\,dv$$

$$= \lambda\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda u}\right]_0^x \mu\left[-\frac{1}{\mu}e^{-\mu v}\right]_0^y$$

$$= \left(1-e^{-\lambda x}\right)\left(1-e^{-\mu y}\right)$$

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(1-e^{-\lambda x}\right)\left(1-e^{-\mu y}\right) & \text{si } x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Ex5:

La d.d.p d'un couple de V.a. (X,Y) est donnée par:

$$f(x,y) = \frac{\alpha}{1+x^2+y^2+x^2y^2} \quad \text{avec } \alpha > 0$$

1/ Trouver α.

2/ X et Y sont-elles indépendants?

3/ Calculer $P[(X,Y) \in E]$ où $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1\}$.

Solution:

1/ $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{1+x^2+y^2+x^2y^2}\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{(1+x^2)+y^2(1+x^2)}\,dx\,dy = 1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy = 1.$$

$$\Rightarrow k\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+y^2)}\,dy = 1 \Rightarrow k\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty}\left[\operatorname{arctg} y\right]_{-\infty}^{+\infty} = 1$$

$$\Rightarrow k\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right]\left[\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right] = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\pi^2}.$$

$$f(x,y) = \frac{\frac{1}{\pi^2}}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

2/ Calculons les densités marginales.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dy = \frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\left[\operatorname{arctg} y\right]_{-\infty}^{+\infty}$$

$$\left.\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}. \\ \text{De même} \quad f_Y(y) &= \frac{1}{\pi}\,\frac{1}{1+y^2} \end{aligned}\right\} f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$

Donc X et Y sont indépendants.

3. $$P((X,Y)\in E) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx\int_{-1}^{+1}\frac{1}{1+y^2}dy$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-1}^{+1}\left[\operatorname{arctg} y\right]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\pi/4-(-\pi/4)\right]\left[\pi/4-(-\pi/4)\right].$$

$$= \frac{1}{4} = 25\,\%.$$