Chapitre III — Interpolation polynomiale.

I Introduction:

. On donne sur l'intervalle $[a,b]$ $(n+1)$ points $a = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = b$ et on dispose des valeurs d'une fonction $y = f(x)$ (fonction qui peut être inconnue) en ces points i.e. $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1), \dots, y_n = f(x_n)$.

On voudrait connaitre la valeur de f en un point $\tilde{x} \neq x_i$ $\tilde{x} \in [a,b]$; a cet effet nous cherchons un polynome $P_n(x)$ de degré inferieur ou égal à n vérifiant:

$$P_n(x_i) = y_i = f(x_i). \quad i = \overline{0,n}.$$

c'est ce qu'on appelle interpoler la fonction f par le polynome P_n aux points (x_i, y_i)

Ensuite on prendra pour approximation de $f(\tilde{x})$, $P_n(\tilde{x})$

<u>Remarque</u>: Si $\tilde{x} \notin [a,b]$ on parle alors d'extrapolation.

II) Théorème : Le polynôme d'interpolation est unique.

Preuve : on connait : $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$.

On cherche un polynome $P_n(x)$ de degré inferieur à n vérifiant.

$P_n(x_i) = y_i$ (y_i sont appelés points d'appui).

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n$$

$$P_n(x_i) = y_i \quad i = \overline{0,n} \iff \begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_n = y_0 \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \dots + a_n = y_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \dots + a_n = y_n \end{cases}$$

c'est un système linéaire où les inconnues sont $a_0, a_1, \dots, a_n$

le déterminant de ce système est : $\Delta = \begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & & x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_n^n & x_n^{n-1} & & x_n & 1 \end{vmatrix}$

Δ est appelé déterminant de Van der Monde ; comme les $x_i \neq x_j$

$\Delta \neq 0$ donc notre système possède une solution unique

d'où le polynôme d'interpolation existe et il est unique.

III / Polynôme de Lagrange

Soit $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a,b]$; $y_0 = f(x_0), \dots y_n = f(x_n)$ donnés

(f peut être inconnue).

L'expression du polynôme de Lagrange est donné par :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x)\, y_i$$

où $$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Remarque : Les L_i sont indépendants des y_i ils dépendent uniquement des x_i.

—

Exemple : Soit le tableau :

x_i	$x_0 = 0$	$x_1 = \frac{1}{6}$	$x_2 = \frac{1}{2}$
y_i	$y_0 = 0$	$y_1 = \frac{1}{2}$	$y_2 = 1$

$y_i = f(x_i)$

Déterminer le polynôme de Lagrange passant par les points (x_i, y_i), puis donner une approximation de $f(\frac{1}{3})$.

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x)\, y_i$$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1/6)(x-1/2)}{(0-1/6)(0-1/2)} = (6x-1)(2x-1).$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{x\,(x-1/2)}{1/6\,(1/6-1/2)} = 9x(1-2x)$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{x\,(x-1/6)}{1/2\,(1/2-1/6)} = x(6x-1).$$

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) y_i = L_0(x) y_0 + L_1(x) y_1 + L_2(x) y_2$$

$$= \frac{9}{2}(x - 2x^2) + 6x^2 - x = -3x^2 + \frac{7}{2}x.$$

$$\boxed{P_n(x) = -3x^2 + \frac{7}{2}x}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) \simeq P_n\left(\frac{1}{3}\right) = -3\,\frac{1}{9} + \frac{7}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}.$$

III/ Polynome de Newton:

• Différences divisées: Soient (x_i, y_i) les points d'appui

• les différences divisées d'ordre 1 sont données par:

$$\delta(x_i, x_{i+1}) = [x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$$

• les differences divisées d'ordre 2 sont données par:

$$\delta(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = [x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+1}, x_{i+2}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i}$$

⋮

$$\delta(x_0, x_1, \dots, x_n) = [x_0, \dots, x_n] = \frac{[x_1, \dots, x_n] - [x_0, \dots, x_{n-1}]}{x_n - x_0}.$$

Le polynome de Newton est donné par:

$$P_n(x) = y_0 + [x_0, x_1](x - x_0) + [x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$+ [x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}).$$

Exemple: Soit le tableau:

x_i	0	$1/6$	$1/2$
y_i	0	$1/2$	1

Donner le polynôme d'interpolation de Newton

tableau des différences divisées

x_i	y_i	ordre 1	ordre 2
0	0	3	-3
$1/6$	$1/2$	$3/2$	
$1/2$	1		

$$P_n(x) = 0 + 3(x-0) + (-3)(x-0)(x-\tfrac{1}{6})$$
$$= 3x - 3x^2 + \frac{1}{2}x$$
$$\boxed{P_n(x) = -3x^2 + \tfrac{7}{2}x}$$

• **Cas particulier**

Si les abcisses des points d'interpolation sont équidistants

i.e. $x_{i+1} - x_i = h$ constante (h sera appelé pas d'interpolation)

alors le polynome d'interpolation de Newton s'écrit:

$$P_n(x) = y_0 + (x-x_0)\frac{\Delta y_0}{h} + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \cdots + \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$$

où
$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$$
$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$$
$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i$$

sont appelées différences finies.

IV/ Estimation de l'erreur d'interpolation:

Théorème: Soient $x_0, x_1, \cdots x_n$ $(n+1)$ points dans $[a,b]$ et soit f une fonction dérivable $(n+1)$ fois dans $[a,b]$ avec $f^{(n+1)}$ continue dans $[a,b]$. Alors pour chaque point $x \in [a,b]$ il existe $\xi \in [a,b]$ tq:

$$E(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i).$$

où P_n est le polynome d'interpolation et $E(x)$ est l'erreur d'interpolation au point x.

Remarque:

Si $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \leq M$ nous avons une majoration de l'erreur:

$$|E(x)| \leq \frac{M \left| \prod_{i=0}^{n} (x - x_i) \right|}{(n+1)!}$$

Remarque:

Notons que l'erreur commise par interpolation polynômiale dépend de la disposition des points d'interpolation (moyennant la quantité $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$)

Le meilleur choix possible pour les points d'interpolation dans l'intervalle $[a,b]$ est donnée par:

$$x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \qquad i=\overline{0,n}$$

qui sont appelés les abcisses de Tchébychev

$$xi = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{i}{n}\pi\right).$$

IV/ Appendice : Splines Cubiques.

L'idée consiste à remplacer les polynômes d'interpolations de degré élevé n par n polynomes de dégré plus faible (pour les splines cubiques de degré 3) reliant chacun deux points consécutifs d'interpolation

$$P_1(x) = y_1 + b_1(x - x_1) + c_1(x - x_1)^2 + d_1(x - x_1)^3 \qquad x_1 < x < x_2$$

$$P_2(x) = y_2 + b_2(x - x_2) + c_2(x - x_2)^2 + d_2(x - x_2)^3 \qquad x_2 < x < x_3$$

$$\vdots$$

$$P_n(x) = y_n + b_n(x - x_n) + c_n(x - x_n)^3 + d_n(x - x_n)^3 \qquad x_n < x < x_{n+1}$$

avec les conditions

$$P_i(x_{i+1}) = y_{i+1}$$

$$P_i'(x_{i+1}) = P_{i+1}'(x_{i+1})$$

$$P_i''(x_{i+1}) = P_{i+1}''(x_{i+1}).$$

Plus des conditions aux frontières par ex : $P_1''(x_1) = 0$, $P_n''(x_{n+1}) = 0$