Fonction de Lyapunov, Intégrales premières.

(Notion de cycle limite) dans $\mathbb{R}^2$.

I/ Intégrale première : (On se limite à des systèmes dans $\mathbb{R}^2$ ; mais les définitions de ce chapitre peuvent être généralisées à $\mathbb{R}^N$).

On considère un système du type $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y). \end{array} \right.$ (S)

Définition 1. On dira que I est une intégrale première du système (S) ssi elle est constante le long des solutions de (S)

i.e $I : (D \subseteq \mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$, pour toute solution $(x(t), y(t))$

$I(x(t)\, y(t)) = C$ (pour $(x,y) \in D$).

Définition 2 : I est de classe $C^1(D)$ est une intégrale première de (S) ; $\left(\frac{dI}{dt} = 0\right)$ $\frac{d}{dt} I(x(t), y(t)) = 0$ pour toute solution $(x(t), y(t))$.

Donc $\frac{\partial I}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial I}{\partial y}\dot{y} = 0$

d'où $\boxed{\frac{\partial I}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial I}{\partial y} g(x,y) = 0.}$

Remarque : Si I est une intégrale première, alors

$I + \text{Cste}$, $\text{Cste} \cdot I$, $I^2$, $I^m$ ... sont aussi des intégrales première

<u>Définition 3</u>: Soit $I_1$, $I_2$ deux intégrales premières on dira que $I_1$ et $I_2$ sont indépendants ssi $rg(\nabla I_1, \nabla I_2) = 2$.

<u>Exemple</u>:
$$\begin{cases} \dot{x} = x(a-by) \\ \dot{y} = y(-c+dx) \end{cases} \qquad a,b,c,d > 0.$$

(version simplifiée de Lotka-Volterra).

Soit $(x,y)$ solution de notre système.

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} = \frac{x(a-by)}{y(-c+dx)} \Rightarrow \frac{\dot{x}(-c+dx)}{x} = \frac{\dot{y}(a-by)}{y}$$

après intégration

$$-c \ln x + dx = a \ln y - by + cste$$

donc $\quad dx - c\ln x + by - a\ln y = cste$

Donc $\quad I(x,y) = dx - c\ln x + by - a\ln y = cste.$

est une intégrale première du système.

<u>Définition</u>: Un système (S) que possède une intégrale première définie sur $\mathbb{R}^2$ est dit système conservatif.

## Stabilité et fonction de Lyapunov.

On considère le système autonome

$$(S)\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$$
$x(0)=x_0,\ y(0)=y_0$

on supposera que $f$ et $g$ sont suffisamment régulières afin d'assurer l'existence et l'unicité de la solution. On supposera que $(x^*, y^*) = (0,0)$ est un pt d'équilibre (on fait si tel n'est pas le cas on pourra toujours translater)

Si $(x^*, y^*) \neq (0,0)$ on fait le changement $(\hat{x},\hat{y}) = (x,y)-(x^*,y^*)$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{\hat{x}} = f(x,y) = f(\hat{x}+x^*, \hat{y}+y^*) = \hat{f}(\hat{x},\hat{y}) \\ \dot{y} &= \dot{\hat{y}} = g(x,y) = g(\hat{x}+x^*, \hat{y}+y^*) = \hat{g}(\hat{x},\hat{y}) \end{aligned}\right\} \quad (0,0) \text{ pt d'équilibre.}$$

Donc par la suite on se limitera à $(x^*,y^*) = (0,0)$ comme point d'équilibre

**Définition 1**: le pt d'équilibre $(x^*,y^*) = (0,0)$ de $(S)$ est dit :

- stable si, $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta(\varepsilon) > 0,\ \|x(0), y(0)\| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \|x(t), y(t)\| \leq \varepsilon.\ \forall t$
- instable s'il n'est pas stable
- Asymptotiquement stable s'il est stable et $\delta$ peut être choisi tel que $\|(x(0), y(0))\| \leq \delta \Longrightarrow \lim\limits_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (0,0)$.

On peut dans la plupart des cas construire le portrait de phase global à partir de la connaissance des systèmes linéarisés au voisinage des points d'équilibre

Sauf que le Théorème de linéarisation ne s'applique pas toujours ( Cas de centres, Jacobiennes à déterminant nul).
(points non hyperboliques).

Dans ces Cas on fait appel à d'autres techniques ; parmi lesquelles , les fonctions de Lyapunov. ___

Définition 2:

Soit $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ Contenant l'origine , une fonction $V$ réelle de classe $C^1$ définie sur $\mathcal{V}$ est dite définie positive si

1°/ $V(0,0) = 0$

2°/ $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathcal{V} \setminus (0,0)$.

Exemple: $V(x,y) = x^2 + y^2$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$.

Conséquence: Une fonction définie positive ; admet un minimum (local) en $(0,0)$

Remarque : • Un candidat (un exemple) de fonction définie positive est $V(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ avec $a > 0$, $ac - b^2 > 0$.

• en effet si $V(x,y)$ est d.p $V(x,0) > 0 \Rightarrow a > 0$

d'un autre côté $V(x,y) > 0$ pour chaque $y$ fixé (positif)

ainsi $\Delta = (b^2y^2 - acy^2) < 0 \Rightarrow b^2 - ac < 0$ i.e. $ac - b^2 > 0$. $(a>0)$.

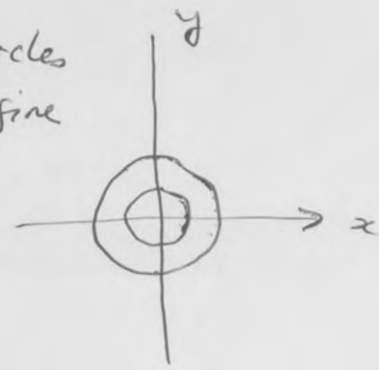
et réciproquement.

• $V(x,y) = (x,y)^T P (x,y)$ $P$ symétrique dont tous les mineurs sont $> 0$.

Définition 3 : On appelle courbe de niveau associées à $V(x,y)$ les points du plan vérifiant $V(x,y) = k$ $(k > 0)$

Exemple : $V(x,y) = x^2 + y^2$


$V(x,y) = k$ des cercles entourant l'origine



<u>Théorème:</u> Soit $(x,y)$ solution de $(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

de point d'équilibre $(0,0)$ et soit $V : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $C^1$ définie positive dans un voisinage $\mathcal{V}$ de l'origine

(i) si $\dot{V}(x,y) \leq 0 \quad \forall (x,y) \in \mathcal{V} - \{(0,0)\}$ alors l'origine est stable

(ii) si $\dot{V}(x,y) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathcal{V} - \{(0,0)\}$ alors l'origine est asymptotiquement stable

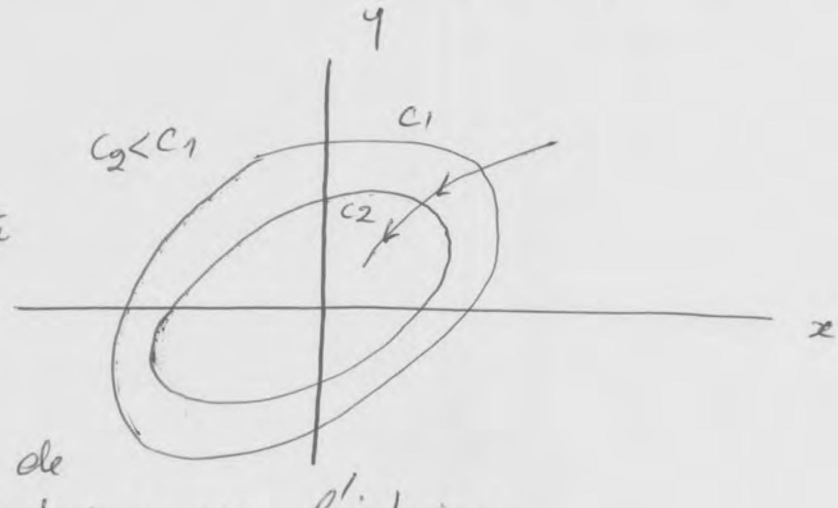
[ • V est appelée fonction de lyapunov forte (ii) (stricte)
et fonction de lyapunov faible (i). ]

Donc ~~cette~~ fonction de lyapunov est une fonction de classe $C^1$ d.p décroissante (strictement) le long des trajectoires solutions.

$$\dot{V}(x,y) = \frac{d}{dt} V(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x,y) = (\nabla V) \cdot \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

<u>Remarque:</u>

V décroissante cela veut dire que les solutions traverse les courbes de niveau de l'exterieur vers l'interieur.



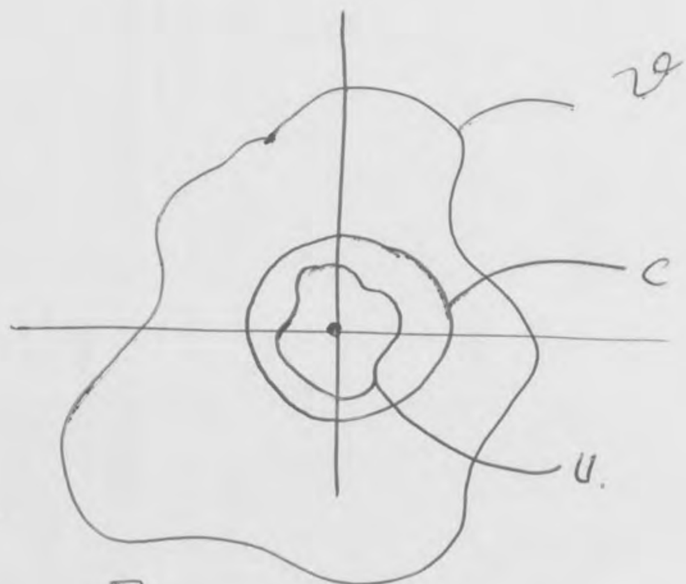
<u>Preuve:</u> Soit $C$ un cercle de centre $(0,0)$ inclus dans $\mathcal{V}$

$V$ admet un minimum dans $C$  $V(x,y) > m$ sur $C$. ($\underline{\underline{V \geq 0}}$)

Soit $U$ l'ensemble des points situés à l'interieur de $C$ et vérifiant $V(x,y) < m$.

($U$ n'est pas vide car $V(0,0) = 0$) et $U$ est un voisinage de $(0,0)$

(Car $V$ continue).




Poson $t_n = n$.

$t_n \longrightarrow +\infty$.

$V(x(n), y(n))$ est décroissante positive elle converge donc.

$$\left[V(x(n+1), y(n+1)) - V(x(n), y(n))\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

D'un autre coté d'après le théorème des valeurs intermédiaires

$$\exists\ s_n \in ]n, n+1[ \text{ tq } \left[V(x(n+1), y(n+1)) - V(x(n), y(n))\right] = \frac{dV}{dt}(x(s_n), y(s_n))$$

de $(x(s_n), y(s_n))$ on peut extraire une sous suite qui converge étant dans un compact

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{dV}{dt}(x(r_n), y(r_n)) = \frac{dV}{dt}(x_\infty, y_\infty).$$

$\Rightarrow (x_\infty, y_\infty) = (0,0)$. donc $\lim_{n \to +\infty} (x(r_n), y(r_n)) = (0,0)$.

$V(x(t), y(t)) \searrow$ minorée elle admet une limite unique

Remarque:

- Pour trouver $V(x,y)$ il n'est pas nécessaire de connaître la solution $(x(t), y(t))$ du système $(S)$ $\left( \frac{\partial V}{\partial x} \cdot f + \frac{\partial V}{\partial y} g < 0 \right)$
- Il n'existe pas de méthode générale pour trouver $V$ ?.

---

Exemple: ① Considérons le système.

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x-1)^3 \\ \dot{y} = -(y-2)^3 \end{cases} \qquad (x^*, y^*) = (1,2)$$

effectuons donc le changement $\begin{cases} u = x-1 \\ v = y-2 \end{cases}$.

$$\begin{cases} \dot{u} = -u^3 \\ \dot{v} = -v^3 \end{cases} \qquad (0,0) \text{ pt d'équilibre.}$$

la linéarisation donne: $J_{(u,v)} = \begin{pmatrix} -3u^2 & 0 \\ 0 & -3v^2 \end{pmatrix}$

$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. $(0,0)$ pt non hyperbolique

et le théorème de linéarisation ne s'applique pas.

Considérons la fonction de "lyapunov" $V(u,v) = u^2 + v^2$.

$$\dot{V} = 2u\dot{u} + 2v\dot{v} = -2u^4 - 2v^4 < 0 \qquad (\text{pour } (u,v) \neq (0,0))$$

$V(u,v)$ est une fonction de lyapunov stricte $(0,0)$ est asymptotiquement stable

② $\dot{x} = -g(x)$.

$g(0) = 0$ ; $x g(x) > 0$. $\forall x \neq 0$ $x \in (-a, a)$.

$x = 0$ pt d'équilibre. (il est clair que 0 est stable).

$$V(x) = \int_0^x g(s)\,ds.$$ sur $\mathcal{D} = (-a, a)$ V est de classe $C^1$ $V(0) = 0$, $V(x) > 0$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot \dot{x} = g(x)\left[-g(x)\right] = -g^2(x) < 0. \quad \forall x \in (-a,a) - \{0\}.$$

donc 0 est asymptotiquement stable

③
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\sin x \end{cases}$$

la linéarisation $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & 0 \end{pmatrix}$ ; $J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$(0,0)$ est un centre la linéarisation n'est pas valable

$$V(x,y) = (1 - \cos x) + \frac{1}{2} y^2.$$

$V(0,0) = 0$ $\quad V(x,y) > 0 \quad -2\pi < x < 2\pi$

$$\dot{V}(x,y) = \dot{x} \sin x + y\dot{y} = y \sin x - y \sin x = 0.$$

$(0,0)$ est stable —

-4- $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - 6x^2 y. \end{cases}$

$(0,0)$ pt d'équilibre ; $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-12xy & -6x^2 \end{pmatrix}$

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ est un centre

$V(x,y) = x^2 + y^2$ ; d.p.

$\dot{V}(x,y) = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2(xy - xy - 6x^2y^2) = -12x^2y^2 < 0. \quad (x,y) \neq (0,0)$

$(0,0)$ est asymptotiquement stable.

Théorème Četaev:

. Soit $\mathcal{U}$ un voisinage ouvert "suffisamment petit" de l'origine.

s'il existe un ouvert $\Omega$ et une fonction de classe $C^1$.

$V : \bar{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant:

i/ l'origine est un point de la frontière de $\Omega$

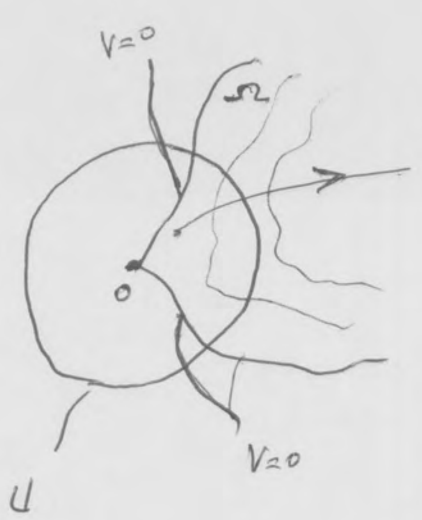
ii/ $V(x) = 0 \quad \forall x \in \partial\Omega \cap \mathcal{U}$.

iii/ $V(x) > 0$ et $\dot{V}(x) > 0 \quad \forall x \in \Omega \cap \mathcal{U}$.

alors l'origine est un point instable

---

Remarque: si dans le théorème de Lyapunov la condition $\dot{V} < 0$ est remplacée par $\dot{V} > 0$ alors l'origine est instable.




Exemple exercice: page 284 Hale -

# Cycle limite :

## Introduction par un exemple :

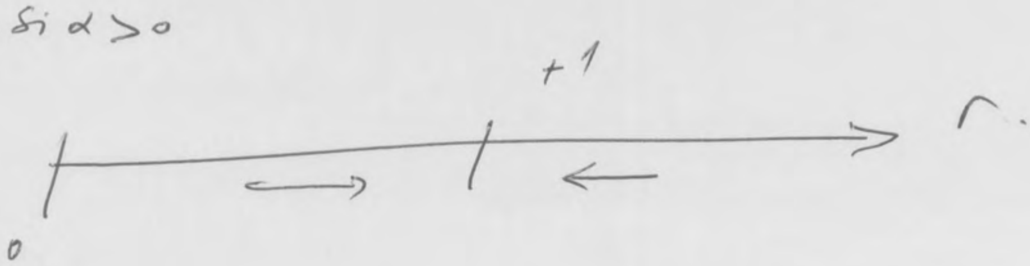
$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} + \alpha\left(1 - x^2 - y^2\right)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

La partie linéaire (linéarisation) $\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ suggère un centre en $(0,0)$ le théorème de linéarisation n'est donc pas applicable.

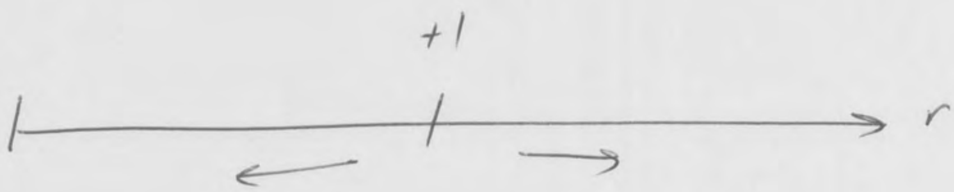
passage en coordonnées polaires.

$$\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ tg\,\theta = y/x. \end{cases} \iff \begin{cases} \dot{r} = \alpha(1 - r^2)\,r \\ \dot{\theta} = -1. \end{cases}$$

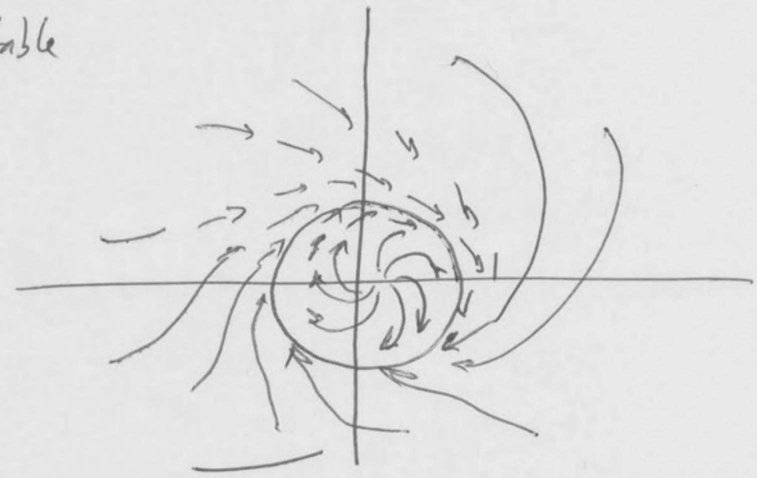
- Si $\alpha > 0$




- Si $\alpha < 0$.



$\underline{\underline{\alpha > 0}}$ $r = 1$ stable



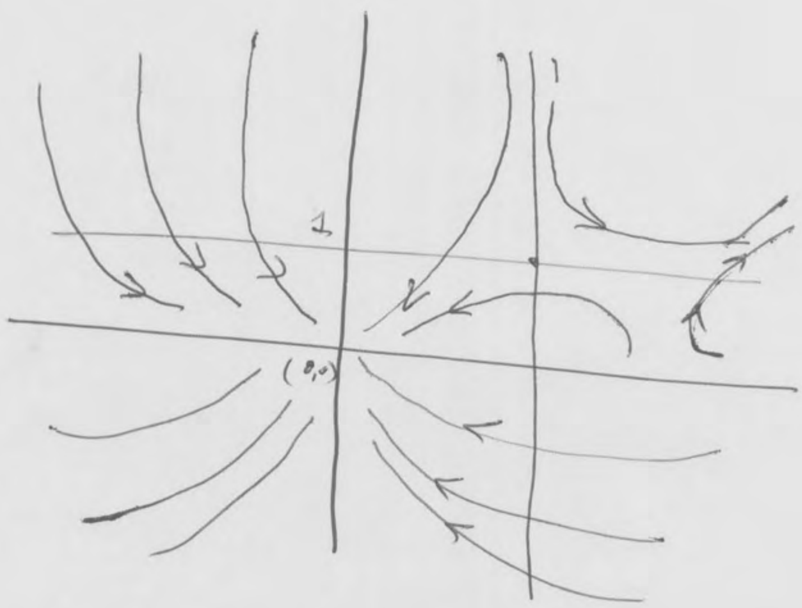
$\underline{\underline{\alpha < 0}}$ $r = 1$ instable

Définition : Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble positivement invariant pour le système $S : \begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

si pour toute condition initiale $(x_0, y_0) \in D$ la trajectoire (solution) issue de $(x_0, y_0)$ est contenue dans $D$.

Exemple :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(y-1) \\ \dot{y} = y(x-1) \end{cases}$$ portrait de phase.




les quatre quadrants sont positivement invariant (Toute trajectoire issue de condition initiale $(x_0, y_0)$ dans l'un des quadrant y reste).

**Définition** Un domaine attractant pour le système (S) $\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$

Si $D \subset \mathbb{R}^2$ est compact et positivement invariant.

**Définition**:

$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ un point $(p_1, p_2)$ est dit point de limite (positif)

de $(x(t), y(t))$ s'il existe une suite $\{t_n\}_n$ $t_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$

telle que $(x(t_n), y(t_n)) \longrightarrow (p_1, p_2)$.

on note $LC^+$ ($L^+$) l'ensemble de ces points

$$LC^+ = \{ (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2, \exists \{t_n\}, \lim_{n \to +\infty} (x(t_n), y(t_n)) = (p_1, p_2) \}.$$

**Théorème de Poincaré Bendixon:**

Soit D un domaine attractant du plan pour le système

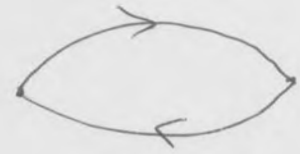
$\begin{cases} \dot{x} = f(x,y) \\ \dot{y} = g(x,y) \end{cases}$ ; alors $\forall (x,y) \in D$ alors $LC^+$ est soit

i/ un point d'équilibre (stable)

ii) Une trajectoire périodique (un cycle limite)

iii/ Une réunion de points d'équilibre reliés par des trajectoires régulière

trajectoire homocline



trajectoire hétérocline

Corollaire I :

s'il existe dans le plan un domaine attractant et qui ne contient pas de points d'équilibre, alors il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine.

Corollaire II

s'il existe dans le plan un domaine attractant qui contient un unique point d'équilibre instable alors il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine