

Introduction: Le but de ce chapitre est de donner des méthodes pour la résolution de systèmes d'équations du type:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (I)$$

où les $(a_{ij})_{i,j}$ et (b_i) sont données et les x_i sont inconnus.

Il est clair que le système (I) peut s'écrire sous forme

matricielle $Ax = b$ où $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

et x est le vecteur inconnu $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Les méthodes classiques de résolution deviennent "pénibles" et très lentes dès que n dépasse 4.

Nous allons présenter 2 types de méthode pour la résolution du système (I), Méthodes directes et Méthodes indirectes (itératives)

II/ Méthodes directes:

Définition: Une méthode est dite directe si elle donne au bout d'un nombre fini d'opérations une solution exacte du Pb(I).

Ce type de méthode est utilisé lorsque $n \leq 100$ et A est une matrice pleine (ne contient pas beaucoup de zéros).

a) Méthode de Gauss: (Pivot).

Introduction par un exemple: Soit à résoudre

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Notre système s'écrit sous forme matricielle:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$A \quad \quad \quad x = b$

1^{ère} étape:

on considère $[A; b] = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 4 & 4 & -3 & 3 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

2^{ème} étape:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 6 & -2 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{pmatrix}$$

on obtient ainsi un nouveau système: $A'x = b'$ où

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ -2x_2 - x_3 = -7 \\ -5x_3 = -15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{résolution par remontée ou retour en arrière.}$$

Cas général: • Principe:

La résolution du système $Ax=b$ par la méthode de Gauss consiste à transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure A' puis résoudre le système $A'x=b'$ par retour en arrière.

1ère étape:

$$\text{On pose } A = A^{(1)} = \begin{matrix} L_1 = \\ \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad \text{et } b = b^{(1)} = \begin{pmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

* Si $a_{11}^{(1)} \neq 0$ on effectue les affectations suivantes:

• la ligne $L_1^{(1)}$ est maintenue (conservée) $L_1^{(1)} \rightsquigarrow L_1^{(2)} = L_1^{(1)}$

• pour $i = \overline{2, n}$ $L_i^{(1)} \rightsquigarrow L_i^{(2)} = L_i^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} L_1^{(1)}$

on obtient alors:

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(1)} & a_{n2}^{(1)} & \dots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} & j = \overline{1, n} \\ a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i1}^{(1)}}{a_{11}^{(1)}} a_{1j}^{(1)} & i = \overline{2, n}, j = \overline{1, n}. \end{cases}$$

• Si $a_{11} = a_{11}^{(1)} = 0$, alors on permute la ligne $L_1^{(1)}$ avec une autre ligne $L_p^{(1)}$ telle que $a_{p1}^{(1)} \neq 0$, et on applique le procédé étudié plus haut.

• k^{ème} étape :

• si $a_{kk}^{(k)} \neq 0$

alors on conserve les lignes $L_1^{(k)}, L_2^{(k)}, \dots, L_k^{(k)}$

et on effectue les affectations

$$L_i^{(k)} \rightarrow L_i^{(k+1)} = L_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} L_k^{(k)} \quad i = \overline{k+1, n}.$$

• Si $a_{kk}^{(k)} = 0$ il suffit de permuter la ligne $L_k^{(k)}$ avec une autre ligne $L_p^{(k)}$ telle que $a_{pk}^{(k)} \neq 0$, et on applique le même procédé cité plus haut.

Ainsi à la fin des opérations on obtient un nouveau système

$$A'x = b'$$

équivalent au système initial $Ax = b$

avec A' triangulaire supérieure.

La résolution du dernier système se fait par retour arrière
i.e on détermine x_n puis x_{n-1} , ... jusqu'à x_1 .

Remarque:

$$\text{Soit le système: } \begin{cases} 0,0003 x_1 + 3x_2 = 2,0001 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

admet pour solution exacte $(x_1, x_2) = (1/3, 2/3)$

Essayons de retrouver ce résultat avec la méthode de Gauss:

$$[A:b] = \begin{pmatrix} 0,0003 & 3 & 2,0001 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0,0003 & 3 & 2,0001 \\ 0 & -9999 & -6666 \end{pmatrix}$$

$$\text{on trouve } \begin{cases} x_2 = \frac{6666}{9999} = \frac{2222}{3333} = 0,6667 \\ x_1 = -0,3333 \end{cases}$$

$$x_2 = 0,667 \rightarrow x_1 = -3$$

$$x_2 = 0,66667 \rightarrow x_1 = 0,3$$

Remarque:

Les solutions obtenues par la méthode de Gauss sont
éloignées des solutions exactes.

Cette perte de précision est due au pivot 0,0003 qui
n'est pas nul mais qui est proche de 0.

Il est donc souvent pratique de choisir le pivot comme étant
le coefficient de plus grand module. (méthode de Gauss avec choix
- du pivot

b/ Décomposition L.U

(L pour Lower)
U pour Upper)

On considère toujours le système d'équations linéaire

$$Ax = b.$$

le principe de la méthode L.U est de décomposer la matrice A de la manière suivante $A = L.U$ où L est une matrice triangulaire unitaire inférieure et U est une matrice triangulaire supérieure.

$$Ax = b \Leftrightarrow L U x = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases}$$

Donc la résolution du système $Ax = b$ est transformé en la résolution de deux systèmes $Ly = b$ et $Ux = y$ qui sont faciles à résoudre car L et U sont triangulaires.

Algorithme:

En fait U n'est rien d'autre que la matrice A' obtenue par la méthode de Gauss.

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

et les coefficients l_{ik} sont données par:

$$l_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}$$

Exemple 2: Décomposition L.U de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 6 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = A'$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$L \cdot U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

résoudre $Ax = b$ où $b = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$Ax = b \Leftrightarrow L \cdot Ux = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 5 \\ y_2 = -7 \\ y_3 = -15 \end{cases}$$

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = 3 \\ x_2 = 2 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

c/ Méthode de Cholesky

Définition:

Soit une matrice carrée d'ordre n ; telle que A est symétrique

($A^T = A$ i.e $a_{ij} = a_{ji}$); A sera dite définie positive ssi

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \quad \langle Ax, x \rangle = x^T A x > 0.$$

Théorème: Une matrice symétrique est définie positive ssi

tous ses mineurs Δ_i sont strictement positifs.

$$\Delta_1 = a_{11}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \dots$$

$$\Delta_n = \det(A)$$

Théorème (Décomposition de Cholesky)

Soit A une matrice carrée d'ordre n symétrique (non-singulière).

$$(A \text{ est définie positive}) \Leftrightarrow (\exists L \text{ une matrice triangulaire inférieure t.g. } A = LL^T.)$$

Remarque:

- L n'est pas unique.
- La décomposition devient unique si l'on suppose que les éléments diagonaux de L sont tous positifs. ($l_{ii} > 0$).

Algorithme de décomposition:

Afin d'obtenir les coefficients de la matrice L (l_{ij}) on multiplie les matrices L et L^T et on identifie avec A

$$A = LL^T$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} l_{11}^2 = a_{11} \\ l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + l_{i3}^2 + \dots + l_{i,i-1}^2 + l_{ii}^2 = a_{ii} \\ l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + l_{i3}l_{j3} + \dots + l_{ij}l_{jj} = a_{ij} \quad i > j \\ l_{ij} = 0 \quad i < j. \end{cases}$$

d'où l'on déduit la valeur des l_{ij} on prenant toujours le signe positif dans les racines:

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2}, \quad i = \overline{2, n} \\ l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk} \right), \quad i > j \\ l_{ij} = 0 \quad i < j \end{cases}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme:

$$\begin{cases} l_{11} = \sqrt{a_{11}} \\ l_{j1} = \frac{a_{1j}}{l_{11}} \quad j = \overline{2, n} \end{cases} ; \begin{cases} l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \\ l_{j2} = \frac{1}{l_{22}} [a_{2j} - l_{21}l_{j1}], \quad j = \overline{3, n} \end{cases} ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} d_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2} \\ l_{ji} = \frac{1}{l_{jj}} \left[a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{jk} \right] \end{array} \right. \quad j = \overline{i+1, \dots, n}$$

$$l_{nn} = \sqrt{a_{nn} - l_{n1}^2 - l_{n2}^2 - \dots - l_{n,n-1}^2}$$

Après factorisation $A = LL^T$

Résoudre le système $Ax = b$ revient à résoudre

$$L \underbrace{L^T x}_y = b \Leftrightarrow \begin{cases} Ly = b \\ L^T x = y \end{cases}$$

Remarque: la méthode de Cholesky permet entre autre le calcul du déterminant de A .

$$\begin{aligned} A = LL^T \Rightarrow \det(A) &= \det(LL^T) = \det(L) \det(L^T) \\ &= (\det(L))^2 = \left(\prod_{i=1}^n d_{ii} \right)^2 \end{aligned}$$

III / Méthodes Itératives (Indirectes)

Lorsque n est très grand, les méthodes directes (type Gauss) deviennent assez compliquées; alors on fait appel aux méthodes itératives; qui consistent à définir une suite $x_k = (x^{(k)})$ - qui converge vers la solution exacte du système $Ax = b$.

Les méthodes itératives que nous allons voir ont le même principe

$$\begin{aligned} \text{à avoir} \quad Ax = b &\Leftrightarrow (M+N)x = b \Leftrightarrow Mx = -Nx + b \\ &\Leftrightarrow x = M^{-1}Nx + M^{-1}b. \end{aligned}$$

on construit alors la suite récurrente: $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$
articulé sur la base du point fixe!

a) Méthode de Jacobi

Soit le système $Ax = b$ avec $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

Soient alors les matrices:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad E = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & & \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = - \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 0 & a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

On a alors:

$$\begin{aligned} A = D - E - S \quad \text{d'où} \quad Ax = b &\iff (D - E - S)x = b \\ &\iff Dx = (E + S)x + b \\ &\iff x = D^{-1}(E + S)x + D^{-1}b \end{aligned}$$

on a alors l'algorithme de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(E + S)x^{(k)} + D^{-1}b. \quad (\text{si } a_{ii} \neq 0).$$

ou encore :

$$\begin{cases} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \quad i = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Théorème: Une condition nécessaire et suffisante pour que l'algorithme de Jacobi converge ($\forall x^{(0)}$) est que

$$\rho(D^{-1}(E + S)) < 1 \quad \text{où} \quad \rho \text{ est } \max_{i = \overline{1, n}} |\lambda_i| \text{ avec}$$

λ_i valeurs propres de $D^{-1}(E + S)$.

Remarque:

En pratique il est très compliqué de calculer ρ

Nous avons alors la condition suffisante de convergence:

$$\left. \begin{aligned} \text{si } |a_{ii}| &> \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \forall i \\ \text{ou } |a_{jj}| &> \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \quad \forall j \end{aligned} \right\} \text{ alors la méthode de Jacobi converge.}$$

Dans ce cas on dit que la matrice A est à diagonale dominante.

Critère d'arrêt:

En pratique on va dans les itérations jusqu'à atteindre la précision demandée ε i.e $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \leq \varepsilon$.

b) Méthode de Gauss-Seidel:

Le principe est le même que pour la méthode de Jacobi, sauf que l'on utilise une nouvelle décomposition de la matrice A .

En effet: $Ax = b \Leftrightarrow (D - E - S)x = b \Leftrightarrow (D - E)x = Sx + b$

$$\text{D'on d'on a: } (D - E)x^{(k+1)} = Sx^{(k)} + b$$

$$\text{ou encore } x^{(k+1)} = (D - E)^{-1} Sx^{(k)} + (D - E)^{-1} b$$

En développant la formule récursive obtenue on a l'algorithme

de Gauss-Seidel: $\left\{ \begin{array}{l} x^{(0)} \text{ donné} \\ x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j < i} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j > i} a_{ij} x_j^{(k)} \right] \end{array} \right.$

Remarque: • à l'étape $(k+1)$ la méthode de Gauss-Seidel nécessite

le stockage de moins d'informations que celle de Jacobi

• Comme pour la méthode de Jacobi il est nécessaire d'assurer

$a_{ii} \neq 0$.

• Les résultats de convergence de la méthode de Jacobi

restent valables pour la méthode de Gauss, même chose pour le critère d'arrêt.