Chapitre II

Variables Aléatoires (V.A).

. <u>Introduction</u> par <u>un exemple</u>:

On lance une pièce de monnaie trois fois en l'air et on observe le résultat. On note par p : l'événement "avoir pile"

f : l'événement "avoir face"

$$\Omega = \{(f,f,f), (f,f,p), (f,p,f), (f,p,p), (p,p,p), (p,f,p), (p,p,f), (p,f,f)\}$$

$Card(\Omega) = 8$ $\quad \forall w \in \Omega \quad p(w) = 1/8$

On définit une application notée X de Ω vers $\mathbb{R}$ par:

$X \equiv$ le nombre de piles obtenues au cours des trois lancers.

$X((f,f,f)) = 0$, $X((f,f,p)) = 1$, $X((f,p,f)) = 1$.

$X((f,p,p)) = 2$, $X((p,p,p)) = 3$, $X((p,f,p)) = 2$

$X((p,p,f)) = 2$ $\quad X((p,f,f)) = 1$.

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$w \longmapsto X(w) = \text{nombre de piles}.$$

X est une variable aléatoire.

Définition "mathématique" d'une variable aléatoire :

Soit Ω un ensemble fondamental :

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ (l'ensemble des parties de Ω)

$\mathcal{A}$ est dite tribu ou σ-Algèbre si

1°/ $\Omega \in \mathcal{A}$

2°/ si $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} = \complement_{\Omega} A \in \mathcal{A}$

3°/ Si $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n, \dots$ une suite infinie d'éléments de $\mathcal{A}$

alors $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \in \mathcal{A}$.

Si p est une probabilité sur Ω alors le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ est appelé espace probabilisé.

Définition de variable aléatoire :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ un espace probabilisé

alors l'application $X : ~~\mathcal{A}~~ \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée variable aléatoire ~~si~~ :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad X^{-1}(]-\infty, a[) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\} \in \mathcal{A}$$

Remarque : comme $X^{-1}(]-\infty, a[) \in \mathcal{A}$, c'est donc un événement et on peut calculer sa probabilité $P(X^{-1}(]-\infty, a[)$
$= P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\})$.

pour tout $a \in \mathbb{R}$, c'est ce qui s'appelle loi de Probabilité de la variable aléatoire X.

Exemple : On jette deux pièces de monnaie et on observe le résultat :

$$\Omega = \{(p,p), (p,f), (f,p), (f,f)\}.$$

$\{\omega\}$ = un évenement élémentaire $\quad P(\omega) = 1/4$.

Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$\omega \longmapsto X(\omega) =$ nombre de piles

(Remarque $X(\omega) = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$).

Donner la loi de probabilité de X.

$$P(X^{-1}(]-\infty, a[) = P(\{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\}.$$

1er cas : $a \leq 0$

$$X^{-1}(]-\infty, a[) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < 0\} = \emptyset.$$

$$P(X^{-1}(]-\infty, a[)) = P(\emptyset) = 0.$$

2ème cas $0 < a \leq 1$

$$X^{-1}(]-\infty, a[) = \{\omega \in \Omega, \quad X(\omega) < a\} = \{(f,f)\}$$

$$P(X^{-1}(]-\infty, a[)) = P(\{f,f\}) = 1/4.$$

3ème cas $1 < a \leq 2$.

$$X^{-1}(]-\infty, a[) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\} = \{(f,f), (p,f), (f,p)\}$$

$$P(X^{-1}(]-\infty, a[)) = 3/4$$

4ème cas : $a > 2$

$$X^{-1}(]-\infty, a[) = \{\omega \in \Omega, X(\omega) < a\} = \Omega$$

$$P(X^{-1}(]-\infty, a[) = 1.$$

$$P(X < a) = \begin{cases} 0 & \text{si } a < 0 \\ 1/4 & \text{si } 0 < a \leq 1 \\ 3/4 & \text{si } 1 < a \leq 2 \\ 1 & \text{si } a > 2. \end{cases}$$

Notation:

$P(X^{-1}(]-\infty, a[)) = P(X<a)$

$P(X^{-1}(]a,b[)) = P(a<X<b)$

$P(X^{-1}([a,b[)) = P(a\leq X<b)$

$P(X^{-1}(\{a\})) = P(X=a)$.

• Variable aléatoire discrète:

Une V.a. X sera dite discrète, si X prend ses valeurs dans un ensemble fini ou un ensemble dénombrable $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ ou $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$

Fonction de répartition d'une v.a discrète

On appelle fonction de répartition de la v.a. X la fonction F définie par:

$$F(x) = P(X\leq x)$$

alors F possède les propriétés suivantes:

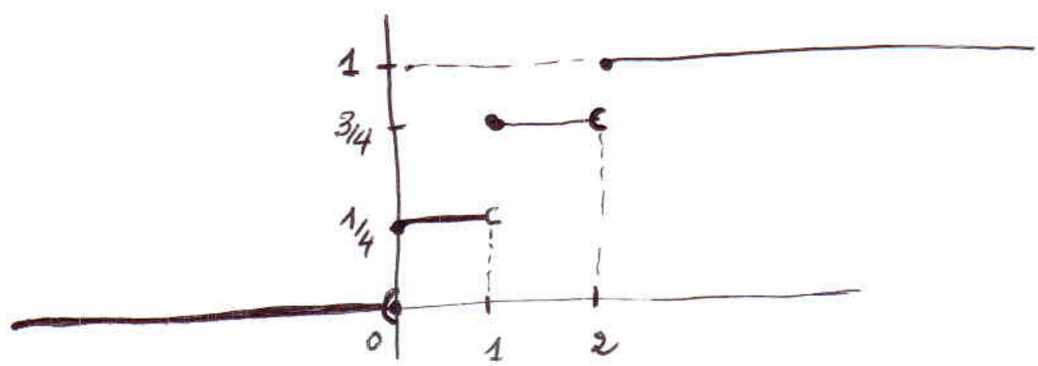
1/ F est croissante

2/ F est constante sur tout intervalle $[x_k, x_{k+1}[$

3/ F est continue à droite de tout point $x\in\mathbb{R}$.

4/ $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

si l'on trace la fonction de répartition de l'exemple précédent on obtient



5. $P(a<X\leq b) = F(b) - F(a)$

Caractéristique de V.a discrèts:

1er cas: Si X prend ses valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ avec $P(X = x_i) = p_i$

l'espérance mathématique de X est donnée par:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

le moment d'ordre k de X est donné par:

$$m_k = E(X^k) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k$$

le moment centré d'ordre k de X est donné par:

$$\mu_k = E\left[(X - m_1)^k\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m_1)^k.$$

la variance de X; c'est le moment centré d'ordre 2

$$Var(X) = V(X) = E\left[(X - m_1)^2\right] = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - m_1)^2$$

la racine carrée de la variance est appelée écart-type

noté σ ainsi $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ou $V(X) = \sigma^2$.

On a aussi la formule $\sigma^2 = V(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$

2ème cas: Si X prend ses valeurs dans un ensemble infini dénombrable $\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\}$. on retrouve les même formules

$$E(X) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i x_i$$

$$\mu_k = E((X - m_1)^k) = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i (x_1 - m_1)^k$$

$$V(X) = E\left[(X - m_1)^2\right] = \sum_{i=1}^{+\infty} p_i (x_i - m_1)^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

à condition que les séries soient convergents

Exemple :

On trace sur une cible de rayon 05 mètres des cercles concentriques de rayons respectifs 1, 2 et 3 mètres.

Un tireur obtient 10, 5, 3, ou 1 point selon qu'il atteint la cible dans les cercles de rayons 1, 2, 3 ou 5 mètre et 0 point s'il rate la cible.

Le tireur a une chance sur deux d'atteindre la cible.

Calculer l'espérance mathématique des points obtenus pour chaque coup tiré.

Solution :

On désigne par X le nombre de points obtenus pour chaque tir

X peut prendre les valeurs $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, $x_5 = 10$.

$$P(X=0) = 1/2$$

$$P(X=1) = 1/2 \cdot \frac{\pi 5^2 - \pi 3^2}{\pi 5^2} = 0{,}32$$

$$P(X=3) = 1/2 \; \frac{\pi 3^2 - \pi 2^2}{\pi 5^2} = 0{,}1.$$

$$P(X=5) = 1/2 \; \frac{\pi 2^2 - \pi}{\pi 5^2} = 0{,}06$$

$$P(X=10) = 1/2 \; \frac{\pi 1^2}{\pi 5^2} = 0{,}02$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{5} p_i x_i = 1/2 \times 0 + 0{,}32 \times 1 + 0{,}1 \times 3 + 0{,}06 \times 5 + 0{,}02 \times 10$$

$$\boxed{E(X) = 1{,}12}$$

Exemple :

On lance un dé jusqu'à l'apparition du chiffre 5 et on arrête.

Soit X la v.a correspondant au nombre de jets.

Calculer $E(X)$

Sol :

X peut prendre les valeurs $1, 2, 3, \dots, i, \dots$

la probabilité d'obtenir un 5 est égale à $1/6$

la probabilité de ne pas obtenir un 5 est égale à $5/6$.

$X = x_i$	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$\dots$	$x_i = i$	$\dots$
$p_i = P(X = x_i)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$	$\left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$		$\left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6}$	

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i x_i = \sum_{i=1}^{+\infty} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \cdot \frac{1}{6} \cdot i$$

$$E(X) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1}$$

il faut observer que

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, x^{i-1} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

il suffit de prendre $x = 5/6$

$$E(X) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{\left(1 - \frac{5}{6}\right)^2} = 6.$$

$$E(X) = 6$$

Variables aléatoires (absolument) continues :

· Soit $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire, X sera dite continue si elle prend ses valeurs dans un intervalle (ou une réunion d'intervalles).

· On appelle fonction de répartition de la V.a. X la fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = P(X \leq x)$.

Propriétés :

- $F(+\infty) = 1$, $F(-\infty) = 0$
- si $x_1 < x_2$ alors $P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.
- si $x_1 < x_2 \Longrightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$. ($F$ est croissante)

Définition : Soit X une V.a. continue et F sa f.d.r. si F est dérivable alors $F' = f$ est appelée densité de probabilité de X.

on a alors : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

Propriétés :

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$
- $\int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a) = P(a < X \leq b)$
- $f \geq 0$ car F est croissante

Caractéristiques de variables aléatoires continues :

L'espérance mathématique de X est donnée par :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx \qquad \text{(si l'intégrale indéfinie existe).}$$

Le moment d'ordre k de X est donné par :

$$m_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,dx$$

Le moment centré d'ordre k de X est donné par :

$$\mu_k = E\left[(X-m_1)^k\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^k f(x)\,dx.$$

La variance de X est le moment centré d'ordre 2.

$$Var(X) = V(X) = E\left[(X-m_1)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m_1)^2 f(x)\,dx = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

l'écart type de X est donné par $\sigma = \sqrt{Var(X)}$

Propriétés :

$$E(aX+b) = aE(X)+b$$

$$V(aX+b) = a^2 V(X).$$

Si X est une V.a d'espérance $E(X) = m_1$ et d'écart type σ

alors $X^* = \dfrac{X-m_1}{\sigma}$ est dite V.a. réduite

$$E(X^*) = 0 \quad \text{et} \quad Var(X^*) = 1.$$

Inégalité de Bienaymé-Tchébicheff :

Soit $\varepsilon > 0$ et une V.a. X d'écart type σ, de variance $V(X) = \sigma^2$ et d'espérance $E(X) = m_1$ alors

$$P(|X-m_1| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Si on pose $\varepsilon = t\sigma$ $\quad P(|X-m_1| \geq t\sigma) \leq \dfrac{1}{t^2}.$

Exemple 1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases} c(1-x^k) & 0\leq x\leq 1. \\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

$k\in\mathbb{N}^*$ et $c\in\mathbb{R}$.

1/ Déterminer les valeurs de c et k pour que f soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

2/ Donner la fonction de répartition de f quand $k=2$.

Solution :

1/ Il est nécessaire d'avoir $c>0$ pour que $f\geq 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 c(1-x^k)dx = 1. \Rightarrow c\left[x-\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{ck}{k+1}=1 \Longrightarrow \boxed{c=\frac{k+1}{k}}$$

c'est la condition pour avoir une densité de probabilité

2/ $k=2$ $$f(x)=\begin{cases} 3/2\,(1-x^2) & 0\leq x\leq 1. \\ 0 & \text{ailleurs.}\end{cases}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$$

- si $x<0$ $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0$$
- si $0\leq x<1$. $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x 3/2\,(1-t^2)dt$$ $$= 3/2\left[t-t^3/3\right]_0^x = 3/2\,(x-x^3/3).$$
- si $x\geq 1$. $$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = 1.$$

Donc

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si} \quad x<0 \\ 3/2\,(x-x^3/3) & \text{si} \quad x\in[0,1[\\ 1 & \text{si} \quad x\in[1,+\infty[\,. \end{cases}$$

Exemple 2 :

Une v.a X a pour densité de probabilité la fonction

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}.$$

1/ Déterminer a et donner la fonction de répartition de X.

2/ Calculer $P(-1<X\leq 1)$

3/ Calculer $E(X)$.

Solution : $a>0$

1/ $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1 \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a}{1+x^2}\,dx = a\left[\operatorname{arctg} x\right]_{-\infty}^{+\infty} = a\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$$\Rightarrow a\pi=1 \Rightarrow a=1/\pi.$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1/\pi}{1+x^2}}$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} t\right]_{-\infty}^{x} = \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{arctg} x+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{F(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}}$$

2/ $P(-1<X\leq 1)=F(1)-F(-1) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right)$

$$=1/2$$

3/ $\displaystyle E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{2 \cdot 1}{2\pi}\left[\ln(1+x^2)\right]_{0}^{+\infty} = +\infty$

$E(X)$ n'existe pas !

Exemple 3:

Une variable aléatoire est distribuée par la densité de probabilité

$$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si} & x < 0 \end{cases} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \quad (\alpha > 0).$$

1/ Donner la fonction de répartition de X.

2/ Trouver les d.d.p. et les F.d.r des variables aléatoires

$$Y = \sqrt{X}$$
$$Z = X^2$$
$$T = \frac{1}{\alpha} \ln X.$$

Solution: 1/ Observons que: $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \alpha e^{-\alpha x} dx = \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right]_0^{+\infty}$

$$= 1$$

f est bien une d.d.p $\forall \alpha > 0$.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_0^x \alpha e^{-\alpha t} dt = \alpha \left[-\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \right]_0^x = 1 - e^{-\alpha x}$$

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\alpha x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad F(x) = P(X \leq x)$$

2/ • $Y = \sqrt{X}$ alors ~~sa~~ fonction de répartition est donnée par

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\sqrt{X} \leq y) = P(X \leq y^2) = F(y^2)$$
$$= 1 - e^{-\alpha y^2}$$

d.d.p $\quad f_y(y) = +2\alpha y e^{-\alpha y^2} \qquad y \geq 0.$

• $Z = X^2$, $\quad F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X^2 \leq z) \Rightarrow P(X \leq \sqrt{z})$

$$F(\sqrt{z}) = 1 - e^{-\alpha\sqrt{z}} \qquad z > 0 \qquad f_Z(z) = \frac{\alpha}{2\sqrt{z}} e^{-\alpha\sqrt{z}} \qquad z > 0.$$

• $F_T(t) = P(T \leq t) = P(\frac{1}{\alpha} \ln X \leq t) = P(X \leq e^{\alpha t}) = F(e^{\alpha t}).$

$$F_T(t) = 1 - \exp(-\alpha e^{\alpha t}).$$

$$f_T(t) = F_t'(t).$$

Principals lois de probabilité :

1- Loi de Bernouilli

Soit X une V.a.r discrète donnée, on dira que X suit une loi de Bernouilli si X prend des valeurs dans $\{0,1\}$. Donc X prendra la valeurs 0 (pour un échec) et 1 (pour un succès).

$P(X=0)=q \qquad P(X=1)=p=1-q \qquad (p+q=1).$

$E(X)=0\times q+1\times p=p \qquad E(X)=p.$

$Var(X)=V(X)=E(X^2)-E(X)^2=(0^2\times q+1^2 p)-p^2$

$V(X)=p-p^2 \implies V(X)=p(1-p) \implies V(X)=pq.$

l'écart-type : $\sigma=\sqrt{pq}.$

2- Loi binômiale $B(n,p)$

On considère une loi de Bernouilli, et on la répète n fois.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de succès lors de n répétition de Bernouilli. On dira que X suit une loi ~~Binouille~~

et on a la formule $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$

et on a $E(X)=np$ et $V(X)=npq.$, $\sigma=\sqrt{npq}$

$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

Exemple :

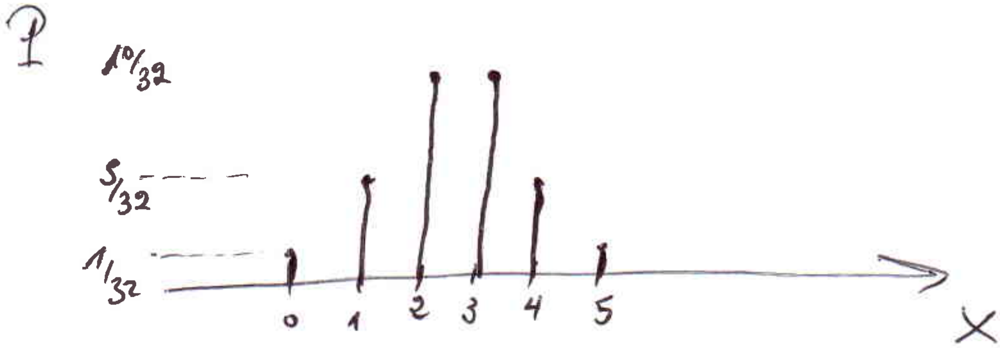
On lance une pièce de monnaie équilibrée 5 fois et on observe les résultats. On s'interesse au nombre de faces obtenus.

X = nombre de faces. $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

X suit une loi binômiale $B(\frac{1}{2}, 5)$ ($p = 1/2$ pièce équilibrée) $n = 5$ lancers

$$P(X=k) = C_5^k p^k (1-p)^{5-k} = \frac{5!}{k!(5-k)!} \frac{1}{2}^k \left(1-\frac{1}{2}\right)^{5-k} = \frac{5!}{k!(5-k)!} \frac{1}{2^5} = \frac{5!}{k!(5-k)!} \frac{1}{32}$$

$X = x_k$	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_k)$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$



Loi de Poisson : Une va discrète X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ si l'on a

$$P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

$E(X) = \lambda$ et $Var(X) = V(X) = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$.

3. Loi normale (loi Gaussienne, loi de Laplace-Gauss)

On dit qu'une V.a. continue X suit une loi normale, si elle admet pour densité de probabilité la fonction

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) \qquad x \in \mathbb{R}.$$

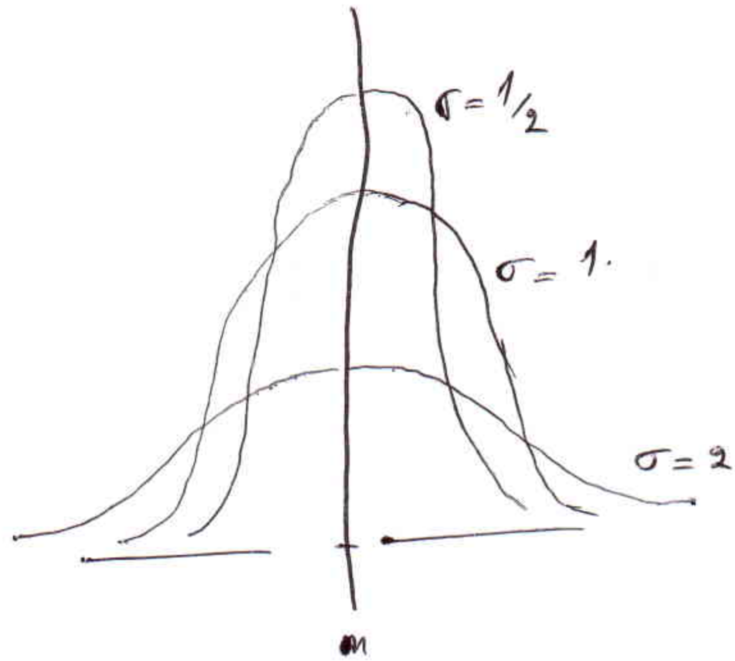
$m = E(X)$ et $\sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{V(X)}$.

On dit que X suit une loi normale $N(m,\sigma)$.

Si on pose $X^* = \dfrac{X-m}{\sigma}$, X^* suit une loi $N(0,1)$

$N(0,1)$ est dite loi gaussienne centrée et réduite

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Approximation d'une loi par une autre :

Loi Binômiale $B(n,p)$

$$P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

Si $p < 0{,}1$ et $n \geq 50$
approximation de la loi $B(n,p)$
binômiale par la loi
de Poisson $P(\lambda)$ où $\lambda = np$.

Loi de Poisson $P(\lambda)$

$$P(X=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$$

Pour $\lambda \geq 18$ approximation
de la loi de Poisson $P(\lambda)$
par une loi normale $N(m,\sigma)$
$m = \lambda$, $\sigma = \sqrt{\lambda}$

Si $n > 18$, p non petit
approximation de la loi Binômiale
$B(n,p)$ par une loi de Normale
$N(m,\sigma)$, $m = np$; $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Loi Normale $N(m,\sigma)$

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Approximation de la loi binômiale par une loi de Poisson :

Cas particulier : n très grand , p assez petit

$B(n,p)$ loi binômiale , X suit $B(n,p)$.

$P(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$ on pose $np = \lambda \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$.

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \frac{\frac{n}{n} \cdot \frac{(n-1)}{n} \cdot \frac{(n-2)}{n} \cdots \frac{(n-k+1)}{n}}{k!} \lambda^k \cdot \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

n très grand $\frac{n}{n} \longrightarrow 1$, $\frac{n-1}{n} \longrightarrow 1$, ---, $\frac{n-k+1}{n} \longrightarrow 1$

$$P(X=k) \approx \frac{1}{k!} \lambda^k \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\longrightarrow 1 \text{ } n \text{ très grand.}}$$

$$\approx \frac{1}{k!} \lambda^k e^{-\lambda}$$ $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$.

Exercice1:

L'équipe du F.C. Barcelone à la probabilité de $9/10$ de gagner chaque fois qu'elle joue un match. Dans un tournoi amical sans match nul. le F.C.B joue 4 matchs, Calculer la probabilité pour qu'elle gagne

1- exactement 2 matchs.

2- au moins un matchs.

3- plus de la moitié des matchs joués.

Solution:

1- Soit la V.A. X = nbre de victoires $X = 0, 1, 2, 4$.

X suit une loi binômiale $B(4, 0{,}9)$.

$$P(X=2) = C_4^2 (0{,}9)^2 (0{,}1)^2 = 6 \times (0{,}9)^2 (0{,}1)^2 = 6 \times (0{,}81)(0{,}01) = 0{,}048$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

2- $P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1 - P(X=0) = 1 - (0{,}1)^4 = 0{,}9999$

3- $P(X=3) + P(X=4) = C_4^3 (0{,}9)^3 (0{,}1) + C_4^4 (0{,}9)^4 = 4 \times 0{,}729 \times 0{,}1 + 0{,}6561 = 0{,}9477$

Exercice2: La probabilité qu'un article produit par une usine soit défectueux est 0,02. Sur une production de 10.000 articles, calculer le nombre moyen des articles défectueux.

Solution: loi binômiale $B(10.000, 0{,}02)$.

la moyenne c'est $E(X) = np = (10\,000 \times 0{,}02) = 200$.

EXERCICE 3: La probabilité qu'un article produit par une usine soit défectueux est 0,02. Calculer la probabilité pour que dans un échantillon de 100 articles il y'ait 3 articles défectueux.

Solution c'est une loi binômiale $\mathcal{B}(100, 0,02)$ $\quad P(X=3)$

mais comme $n = 100 \geq 50$ et $p < 0,1$, on peut appliquer la loi de Poisson $P(\lambda)$ avec $\lambda = np = 100 \times 0,02 = 2$.

$$\left(P(X=k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} \right)$$

$$P(X=3) = \frac{e^{-2}}{3!} 2^3 = 0,18.$$

EXERCICE 4: Soit X une V.a. ayant pour distribution la loi de Poisson. $P(\lambda)$. Montrer que $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Solution:

$$p_k = P(X=k) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}$$

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda.$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2.$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{+\infty} x_k^2 p_k = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)\lambda^{k+1}}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^{k+1}}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{k!} \right]$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \left[\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} + e^{\lambda} \right] = \lambda e^{-\lambda} \left[\lambda e^{\lambda} + e^{\lambda} \right]$$

$$= \lambda^2 + \lambda.$$

$$V(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$
$$= \lambda.$$

EXERCICE : Une centrale téléphonique reçoit en moyenne 300 appels par heure. On suppose que le nombre d'appels suit une loi de Poisson. Calculer la probabilité que durant 2 minutes la centrale reçoit

1/ trois appels

2/ au moins un appel.

3/ au plus deux appels.

Solution Il faut d'abord trouver λ le paramètre de la loi de Poisson. Or λ représente la moyenne $\frac{300}{60} \times 2$ $\left[\begin{array}{l} 300 \text{ appel par heure} \\ 2\text{min} \;—\; \lambda \end{array} \right]$

$\lambda = 10$

1/ $P(X=3) = \frac{10^3}{3!} e^{-10} = 0{,}0067$.

2/ $P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2) + \cdots + P(X=n) + \cdots$

$= 1 - P(X=0)$

$= 1 - \frac{10^0}{0!} e^{-10} = 0{,}9999$

3/ $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$= \frac{10^0}{0!} e^{-10} + \frac{10^1}{1!} e^{-10} + \frac{10^2}{2!} e^{-10}$

$= 0{,}0025$.

Exercice : On jette 180 fois un dé bien équilibré.

1/ Calculer la probabilité pour que l'on ait un 6, 29 fois.

2/ " " " " " " " entre 31 et 35 fois

Solution :

X le nombre d'obtenir un 6 $X = \{0, 1, 2, \ldots, 180\}$.

On est en présence d'une loi binomiale $B(180, \frac{1}{6})$.

1/ $P(X = 29) = C_{180}^{29} \left(\frac{1}{6}\right)^{29} \left(\frac{5}{6}\right)^{151} \longrightarrow$ trop de calculs.

· approximation par une loi de Poisson $P(\lambda)$ $\lambda = np = 180 \times \frac{1}{6} = 30$

$P(X = 29) = \frac{30^{29}}{29!} \cdot e^{-30} \longrightarrow$ trop de calculs.

· approximation par une loi normale $N(m, \sigma)$, $m = np$, $\sigma = \sqrt{npq}$

$m = 30$, $\sigma = \sqrt{180 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}} = 5$

$N(30, 5)$ est une approximation de $B(180, \frac{1}{6})$

Comme N est continue

$\frac{X - 30}{5}$ suit une loi normale centrée réduite $N(0, 1)$.

$$P(29{,}5 \leq X \leq 30{,}5) = P\left(\frac{-0{,}5}{5} \leq \frac{X-30}{5} \leq \frac{0{,}5}{5}\right)$$

$$= 2 P\left(\frac{X-30}{5} \leq \frac{0{,}5}{5}\right) - 1$$

$$= 2 P\left(\frac{X-30}{5} \leq 0{,}1\right) - 1$$

$$= 2 \times 0{,}5398 - 1 = 0{,}0792.$$

2/ $P(31 \leq X \leq 35) \simeq P(30{,}5 \leq X \leq 35{,}5) = P\left(0{,}1 \leq \frac{X-30}{5} \leq 1{,}1\right)$

$= 0{,}8643 - 05398$

$= 0{,}3245.$

EXERCICE: Les notes obtenues par une classe à un examen sont étalées de 0 à 20. La note moyenne est de 08,5, l'écart type est de 1,2. En supposant que les notes sont réparties selon une loi normale, Trouver

1/ le pourcentage d'étudiants ayant obtenus la note de 8.

2/ la note maximale des 10% d'étudiants ayant obtenus les plus mauvaises notes

3/ la note minimale des 10% d'étudiants ayant obtenus les meilleurs notes.

Solution:

X suit une loi normale $N(m, \sigma) = N(08{,}5,\ 1{,}2)$.

1/ Comme X est continue $P(X=8) = 0$ sans calcul donc au lieu de calculer $P(X=8)$ on prend par exemple $P(7{,}75 \leq X \leq 8{,}25)$

$X \curvearrowright X^* = \dfrac{X - 8{,}5}{1{,}2}$ suit une loi $N(0,1)$.

$$P(7{,}75 \leq X \leq 8{,}25) = P\left(\frac{7{,}75 - 8{,}5}{1{,}2} \leq X^* \leq \frac{8{,}25 - 8{,}5}{1{,}2}\right)$$

$$= P(-0{,}625 \leq X^* \leq -0{,}208)$$

$$= \left(1 - F(0{,}208)\right) - \left(1 - F(0{,}625)\right)$$

$$= F(0{,}625) - F(0{,}208)$$

$$= F(0{,}63) - F(0{,}21)$$

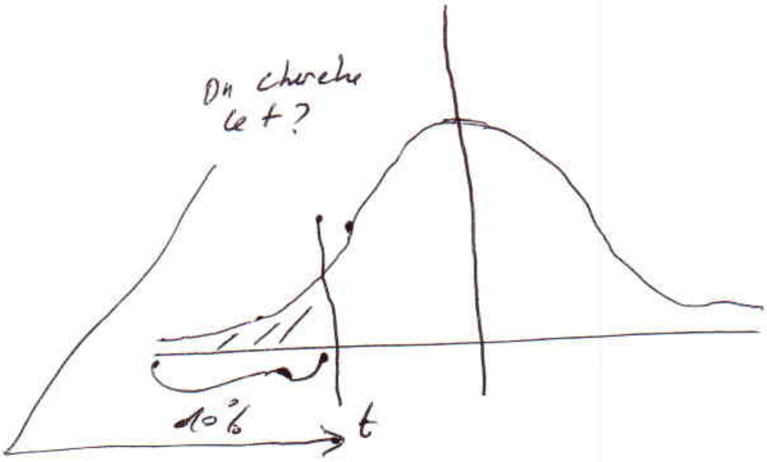
$$= 0{,}7357 - 0{,}5832$$

$$= 0{,}1525$$

2/
On cherche t tel que

$P(X \leq t) = 10\%$

$P\left(\frac{X-8,5}{1,2} \leq \frac{t-8,5}{1,2} \right) = 10\%$



$T = \frac{t-8,5}{1,2}$ correspondant à loi $N(0,1)$ donc T est nécessairement négatif

$P(X^* \leq T) = 1 - P(X^* \leq -T) = 10\%$

$P(X^* \leq -T) = 0,9$ par la table de la loi normale

$-T$ correspond à $1,28$ (on acceptera aussi $1,29$).

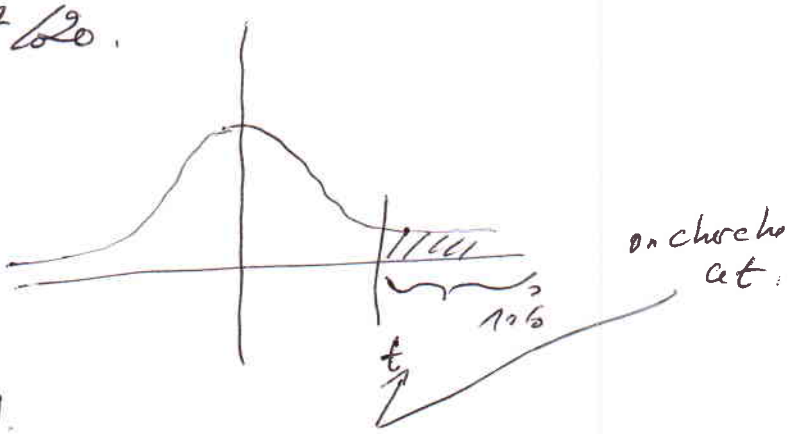
Donc $T = -1,28 \Rightarrow t = (1,2 \times T) + 8,5$

$\Rightarrow t = (1,2 \times (-1,28)) + 8,5$

$\Rightarrow t = 6,96 \simeq 7.$

la note recherchée est 7/20.

3/ même démarche



$P(X \leq t) = 0,9.$

$P\left(\frac{X-8,5}{1,2} \leq \frac{t-8,5}{1,2} \right) = 0,9.$

$\frac{t-8,5}{1,2} = 1,28$ (on acceptera aussi $1,29$).

$t = 1,2 \times 1,28 + 8,5 = 10,036.$

la note recherchée est de 10/20