Chapitre 1 : Résolution d'équations non-linéaires.

## I/ Introduction :

• On appelle équation non linéaire toute équation du type

$$f(x) = 0$$

où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non linéaire.

par exemple. $e^{\sin x} - 2\cos \pi x = 0$.

$3x^5 + 4x^3 - 2x^2 + 3 = 0$

• tout réel $\alpha$ vérifiant $f(\alpha) = 0$ est appelé racine de l'équation $f(x) = 0$.

Remarques

• Soit l'équation non linéaire : $f(x) = e^x + x^2 - 4x + 5 = 0$.

On remarquera que : $f(x) = e^x + (x-2)^2 + 1 \geqslant 1$.

avant d'entamer toute procédure de résolution il est recommandé de s'assurer que l'équation $f(x) = 0$ possède bien des solutions.

• Si l'équation $f(x) = 0$ possède plusieurs racines, il est recommandé de les séparer i.e trouver un intervalle $[a, b]$ qui ne contient qu'une seule racine $\alpha$. dans ce cas $\alpha$ est dite séparée ou isolée. cela peut se faire graphiquement.

## II/ Méthodes itératives:

Soit à résoudre l'équation non linéaire

$$f(x)=0 \qquad (E)$$

ie trouver $x^*$ tel que $f(x^*)=0$.

1. Définition: Une méthode itérative pour la résolution de (E) consiste à construire une suite (récurrente) $(x_k)_k$ de valeur initiale $x_0$ telle que: $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x^*$ $(f(x^*)=0)$.

2. Ordre (Vitesse) de Convergence:

Soit $(x_k)_k$ une suite telle que $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = x^*$.

- La convergence sera dite linéaire s'il existe une constante $\rho$ telle que $0\leq|\rho|<1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{x_{k+1}-x^*}{x_k - x^*} = \rho$
- La Convergence sera dite superlinéaire si $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*} = 0$.
- La convergence sera dite d'ordre $p>1$ s'il existe $C>0$ tel que $\lim\limits_{k\to+\infty} \dfrac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p} = C$.

( si $p=2$ la convergence est dite quadratique
si $p=3$ —— " —— " — cubique )

Exemple: Soit la suite $(x_k)_k$ de terme général: $x_k = 1+2^{2-k}$

$\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = 1 = x^*$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{2-(k+1)}}{2^{2-k}} = \frac{1}{2} = \rho \qquad \text{(convergence linéaire).}$$

3. Méthode de Dichotomie (bissection).

• Rappel:

Théorème des valeurs intermédiaires:

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors il existe au moins $x^* \in ]a,b[$ tel que

$$f(x^*) = 0.$$

Remarque: Si de plus $f$ est strictement monotone alors $x^*$ est unique.

Dichotomie: On cherche à résoudre $f(x) = 0$.

Supposons que $f$ est continue sur $[a,b]$ et que $f(a) \cdot f(b) < 0$ donc (par le thm de V.I.) $\exists x^* \in ]a,b[$ t.q $f(x^*) = 0$.

On pose $a = a_0$, $b = b_0$ $[a,b] = [a_0, b_0] = I_0$.

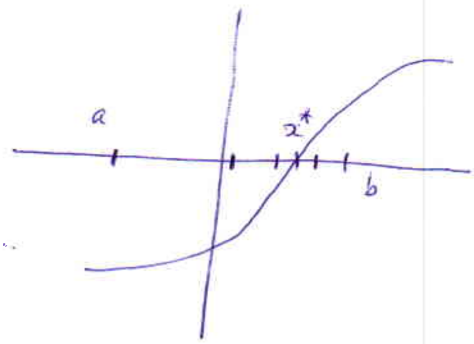
On divise l'intervalle $[a_0, b_0]$ en deux, et on construit l'intervalle $I_1 = [a_1, b_1]$ comme suit:

Pour $x_0 = \dfrac{a_0 + b_0}{2}$ (milieu de $[a_0, b_0]$) on fait le test suivant

si $f(a_0) \cdot f(x_0) < 0$ alors $[a_0, x_0] = [a_1, b_1] = I_1$

sinon $[x_0, b_0] = [a_1, b_1] = I_1$

on réitère ce procédé pour obtenir une suite d'intervalles $I_k = [a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$




$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2}$$

si $f(a_k) \cdot f(x_k) < 0$ $[a_k, x_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1}$

sinon $[x_k, b_k] = [a_{k+1}, b_{k+1}] = I_{k+1}$

et on prend $x_k$ comme approximation de $x^*$

Exemple: Soit à résoudre l'équation:

$$f(x) = xe^x - 1 = 0.$$

1/ Calculer $f(0)$ et $f(1)$.

2/ Donner en utilisant la méthode de Dichotomie une approximation de la solution $x^*$.

Solution:

1/ $f(0) = -1$ et $f(1) = 1,718281828$

2/ $f$ est continue sur $[0,1]$ strictement croissante, et comme $f(0) \times f(1) < 0$ l'équation $f(x) = 0$ possède une solution unique dans $[0,1]$.

Appliquons la méthode de Dichotomie:

$[a_0, b_0] = [0, 1] \longrightarrow x_0 = \frac{0+1}{2} = 0,5$, $f(x_0) = f(0,5) = -0,175639364$

$[a_1, b_1] = [0,5, 1] \longrightarrow x_1 = \frac{0,5+1}{2} = 0,75$, $f(x_1) = f(0,75) = 0,587750012$

$[a_2, b_2] = [0,5, 0,75] \longrightarrow x_2 = \frac{0,5+0,75}{2} = 0,625$, $f(x_2) = f(0,625) = 0,167653723$

$[a_3, b_3] = [0,5, 0,625] \longrightarrow x_3 = \frac{0,5+0,625}{2} = 0,5625$, $f(x_3) = f(0,5625) = -0,012781755$

$[a_4, b_4] = [0,5625, 0,625] \longrightarrow x_4 = 0,59375$

$\vdots$

$[a_{12}, b_{12}] =$ $x_{12} = 0,567260741$ $f(x_{12}) = 0,000324573$

$x^* \approx 0,567260741$ est une approximation de $x^*$.

• Convergence de la méthode de Dichotomie:

la méthode de Dichotomie génère une suite d'intervalles $I_k=[a_k,b_k]$

telle que:
$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k \leq \cdots \leq b_0$$
$$b_0 \geq b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_k \geq \cdots \geq a_0.$$

donc $(a_k)_k$ est une suite croissante majorée donc convergente
$(b_k)_k$ est une suite décroissante minorée donc convergente

de plus
$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}). \qquad \forall k \geq 1.$$
$$b_k - a_k = \frac{1}{2^k}(b_0 - a_0) \Rightarrow \lim_{k \to +\infty}(b_k - a_k) = 0$$

$(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ sont adjacentes elles convergent vers la même limite $\ell$

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} a_k = \lim_{k \to +\infty} b_k$$

On sait que $f(a_k) \cdot f(b_k) < 0$

par passage à la limite $f(\ell)^2 \leq 0 \Longrightarrow f(\ell) = 0$

$\ell = x^*$ donc $(a_k)_k$ et $(b_k)_k$ convergent vers la solution $x^*$
de l'équation $f(x^*) = 0$.

si l'on pose $x_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$ nous avons:

$$|x^* - x_k| \leq \frac{1}{2}(b_k - a_k) = \frac{1}{2^{k+1}}(b_0 - a_0) = \frac{1}{2^{k+1}}(b - a)$$

Conclusion: Si $f$ est continue sur $[a,b]$ telle que $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors l'algorithme de bissection converge vers la solution $x^*$ $(f(x^*) = 0)$ et à la $k^{ième}$ itération nous l'estimation de l'erreur absolue.

$$e_k = |x_k - x^*| \leq \frac{1}{2^{k+1}}(b - a).$$

## 4. Méthode des approximations successives (point fixe).

Rappel: Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue. On dit que $x^* \in \mathbb{R}$ est un point fixe de $g$ si $g(x^*) = x^*$.

On cherche à résoudre l'équation $f(x) = 0$ ; si on arrive à écrire $f$ sous la forme: $f(x) = g(x) - x$ (ou $f(x) = x - g(x)$)

Chercher les racines les zéros de $f$ revient à chercher les points fixes de $g$.

Théorème: Soit $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction contractante i.e.

$\exists$ $L$, $0 \leq L < 1$ tel que:

$$\forall x, y \in [a,b] \quad |g(y) - g(x)| \leq L|y - x|.$$

alors $g$ admet un point fixe unique $x^* \in [a,b]$.

De plus pour tout point $x_0 \in [a,b]$ la suite $(x_k)_k$ définie par $x_{k+1} = g(x_k)$ converge vers $x^*$.

· Remarques:

- Une application contractante est continue. (exercice).
- Si $g$ est contractante et dérivable alors $|g(y) - g(x)| \leq L|y - x|$

ie $\dfrac{|g(y) - g(x)|}{|y - x|} \leq L$ par passage à la limite quand $y \longrightarrow x$

$$|g'(x)| \leq L < 1.$$

Preuve du Théorème du point fixe :

hypothèses $g : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ contractante

$\exists L<1, \ \forall y, x \quad |g(y)-g(x)| \leqslant L|y-x|$.

—

Soit la suite $(x_k)_k$ définie par $x_{k+1} = g(x_k)$ et $x_0 \in [a,b]$

nous allons montrer que $(x_k)_k$ est de Cauchy.

$$|x_{k+1} - x_k| = |g(x_k) - g(x_{k-1})| \leqslant L \ |x_k - x_{k-1}|$$

Donc $|x_{k+1} - x_k| \leqslant L\,|x_k - x_{k-1}| \leqslant L^2 |x_{k-1} - x_{k-2}| \leqslant \cdots \leqslant L^k |x_1 - x_0|$

Soit $n > k$ on a $x_n - x_k = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_{k+1} - x_k)$

nous obtenons ainsi : $|x_n - x_k| \leqslant |x_n - x_{n-1}| + |x_{n-1} - x_{n-2}| + \cdots + |x_{k+1} - x_k|$

$$\leqslant (L^{n-1} + L^{n-2} + \cdots + L^k)|x_1 - x_0|$$

$$\leqslant L^k (1 + L + L^2 + \cdots + L^{n-1-k}) \ |x_1 - x_0|$$

$$\leqslant L^k \frac{1 - L^{n-k}}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$\leqslant \frac{L^k}{1-L} |x_1 - x_0|$$

Donc $(x_k)_k$ est de cauchy, elle est donc convergente dans $\mathbb{R}$

or $x_{k+1} = g(x_k)$ lorsque $k \longrightarrow +\infty$ nous avons $g(x^*) = x^*$ ($g$ est cont)

donc $(x_k)_k$ Converge vers le point fixe $x^*$.

de plus $x^*$ est unique, en effet supposons qu'il existe un autre point fixe $y^*$ avec $x^* \neq y^*$ alors

$$0 < |y^* - x^*| = |f(y^*) - f(x^*)| \leqslant L\,|y^* - x^*| < |y^* - x^*| \quad (L<1)$$

Contradiction donc $y^* = x^*$

**Exemple:** Résoudre par la méthode des approximations successives

l'équation: $f(x) = x e^{x} - 1 = 0$ sur $[0,1]$

- l'équation $x e^{x} - 1 = 0$ peut s'écrire $x = e^{-x}$

en prenant $g(x) = e^{-x}$ on cherche à trouver ~~le~~ pt fixe de g.

g est continue et dérivable.

on remarque que $g'(x) = -e^{-x} \Rightarrow |g'(x)| = |e^{-x}| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

donc g est contractante. On peut donc appliquer la méthode des approximations successives.

$x_0 = 0, \quad x_1 = g(x_0) = e^{0} = 1, \quad x_2 = g(x_1) = e^{-1} = 0{,}367879441.$

$x_3 = g(x_2) = 0{,}692200627, \ldots, \quad x_7 = 0{,}579612335, \ldots, x_{13} = 0{,}567555663[illegible]$

$x^* \approx 0{,}567$

**Représentation graphique:**

$f(x) = \cos x - x = 0$ sur $[0,1]$

$\cos x = x$ on peut prendre $g(x) = \cos x$

$|g'(x)| = |\sin x| < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

$x_{k+1} = g(x_k)$

$x_0 = 0{,}75$

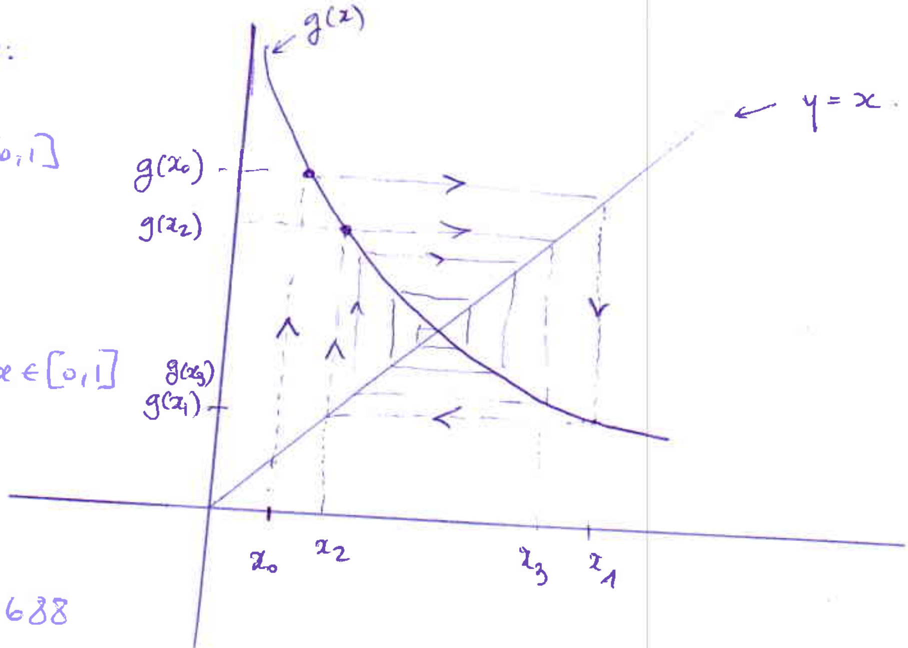
$x_1 = \sin(0{,}75) = 0{,}731688$

$x_2 = \sin(0{,}731688) = 0{,}744047$

$\vdots$

$x_{12} = 0{,}739180$

$x_{13} = \sin(x_{12}) = 0{,}739020$




Convergence des approximations successives.

Estimation de l'erreur et critère d'arrêt : Soit $g$ comme précédemment :

$x_{k+1} = g(x_k)$ on a vu que :

$$|x_k - x_n| \leq L^k |x_0 - x_{n-k}| \leq L^k |b-a|.$$

en passant à la limite pour $n$ uniquement on obtient :

$$|x_k - x^*| \leq L^k |b-a|.$$

ainsi si on désire une approximation $x_k$ de $x^*$ avec $n$ décimales exactes il suffit de s'arrêter à $k$ vérifiant :

$$\cancel{10^{-n} \leq L^k |b-a| \Leftrightarrow L^k \geq}$$

$$|x_k - x^*| \leq L^k |b-a| \leq \frac{1}{2} 10^{-n} \Rightarrow L^k \leq \frac{1}{2} \frac{10^{-n}}{b-a}$$

$$\Rightarrow e^{k \log L} \leq \frac{1}{2} \frac{10^{-n}}{b-a} \Rightarrow k \log L \leq \log\left(\frac{1}{2} \frac{10^{-n}}{b-a}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{k \geq \frac{\log\left(0{,}5 \frac{10^{-n}}{b-a}\right)}{\log L}}$$

5. Méthode de Newton-Raphson:

Résolution de $f(x)=0$.

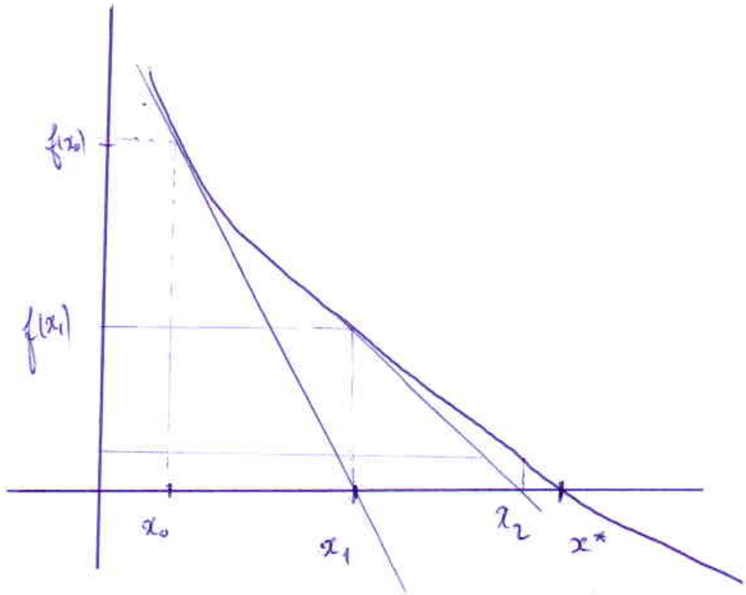
Approche géométrique:

. Soit $x_0$ une donnée initiale ; on trace la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$ ; on prend pour $x_1$ l'intersection de cette tangente avec l'axe des x et on répète ce procédé pour obtenir $x_2, x_3, \dots$

$x_0$ initial

la tangente au pt $(x_0, f(x_0))$ a pour équation:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$




l'intersection de cette droite avec l'axe des x s'effectue pour $y=0$ et $x = x_1$ ie

$$-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$$

Donc $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. et de manière similaire on trouve: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

ainsi nous obtenons la méthode itérative dite de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}. \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

formule de récurrence de Newton-Raphson.

Approche analytique:

Soit $x^*$ la solution exacte $f(x^*)=0$ recherchée et soit $x_0$ une valeur approchée de $x^*$. On suppose que $f$ est de classe $C^2$ au voisinage de $x^*$, Le developpement de Taylor d'ordre 2 de $f$ nous donne:

$$f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + \frac{f''(\xi)}{2}(x^* - x_0)^2 \qquad \xi \in ]x^*, x_0[$$

Or $f(x^*)=0$ , en supposant que $f'(x_0)\neq 0$ on aura:

$$x^* = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} - \frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)}(x^*-x_0)^2$$

Si $x_0$ est proche de $x_*$ on peut négliger le reste $-\frac{f''(\xi)}{2f'(x_0)}(x^*-x_0)^2$

ainsi $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ est une valeur approchée ameliorée

de $x^*$.

En itérant ce procédé on trouve la formule de recurrence

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad k=0,1,\dots$$

Formule de recurrence de Newton Raphson.

Exemple: Résoudre $f(x)=xe^x-1=0$ par la méthode de Newton

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} \qquad x_0=0. \quad \text{3 décimales exactes.}$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k e^{x_k}-1}{x_k e^{x_k}+e^{x_k}} = x_k - \frac{x_k - e^{-x_k}}{x_k+1} = \frac{x_k^2 - e^{-x_k}}{x_k+1}$$

Si $x_0=0$ , $x_1 = 1$ , $x_2 = 0{,}68393972$ , ... ,

$x_3 = 0{,}577454476$ $\qquad$ $x_7 = 0{,}567143290. \approx x^*$

$x_4 = 0{,}567229737$

$x_5 = 0{,}567143296$ .

## Convergence de la Méthode de Newton:

pour la résolution de $f(x)=0$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad k=0,1,2,\dots \qquad (*)$$

Posons $$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(*) devient: $x_{k+1} = g(x_k)$.

Comme $$g'(x) = 1 - \frac{(f'(x))^2 - f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2} = \frac{f(x) f''(x)}{f'(x)^2}$$

au pt $x = x^*$ $f(x^*)=0 \Rightarrow g'(x^*)=0$.

par continuité de $g'(x)$ on a $|g'(x)| < L \leq 1$

Donc on est dans les conditions du thm du point fixe.

$(x_k)_k$ converge vers $x^*$.

Sous les conditions : 1/ $f$ de classe $C^2$

2/ $f' \neq 0$.

3/ $x_0$ convenablement choisi $(f(x_0) f''(x_0) > 0)$.

## Critère d'arrêt et estimation de l'erreur:

$f(x)=0$ et $x^*$ solution exacte.

et soit $(x_k)_k$ la suite des approximations obtenues à l'aide de la formule de Newton: $$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

le développement de Taylor à l'ordre 1 donne:

$$f(x_k) = f(x^*) + f'(\xi)(x_k - x^*). \qquad \xi \in (x_k, x^*)$$

Donc : $x_k - x^* = \dfrac{f(x_k)}{f'(\xi)}$ où $\xi \in (x_k, x^*)$.

D'autre part : $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} \Rightarrow x_{k+1} - x_k = \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

Si on fait l'approximation : $f'(\xi) \simeq f'(x_k)$

on obtient $|x_{k+1} - x_k| \simeq |x_k - x^*|$.

Donc si on veut calculer une approximation de $x^*$ avec $n$ décimales exactes, il suffit de s'arrêter à l'itération $k$ vérifiant :

$$|x_{k+1} - x_k| \leq 0,5 \times 10^{-n}.$$

<u>Exercice</u> : Montrer que la convergence de la méthode de Newton est quadratique.

<u>Solution</u> : Par la formule de Taylor nous avons :

$$f(x^*) = f(x_k) + f'(x_k)(x^* - x_k) + \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2.$$

Comme $f(x^*) = 0$ on a alors $f'(x_k)(x_k - x^*) - f(x_k) = \frac{1}{2} f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2$.

Soit : $x_{k+1} - x^* = (x_k - x^*) - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ (par def de $x_{k+1} = x_k - \dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$)

$$= \frac{(x_k - x^*) f'(x_k) - f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{f''(\xi_k)(x^* - x_k)^2}{2 f'(x_k)}$$

Donc $$\lim_{k \to +\infty} \frac{|x_{k+1} - x^*|}{|x_k - x^*|^2} = \lim_{k \to +\infty} \frac{f''(\xi_k)}{2 f'(x_k)} = \frac{f''(x^*)}{2 f'(x^*)} = C > 0.$$