Chapitre I Rappels

1- Ensemble fondamental et événements:

L'ensemble noté Ω de tous les résultats possibles d'une expérience donnée est appelé " Ensemble fondamental ". Tout ~~sous~~ ensemble $A \subset \Omega$ est appelé événement. Le singleton $\{a\} \subset \Omega$ est appelé événement élémentaire. $\emptyset$ est appelé événement impossible. Ω est appelé événement certain ou sûr.

Quand deux événements A et B sont disjoints, i.e $A \cap B = \emptyset$

On dit qu'ils s'excluent mutuellement, ils ne peuvent pas se réaliser ~~mutuellement~~ simultanément.

Exemple: On jette un dé et on observe le résultat obtenu:

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

A l'événement correspondant à l'apparition d'un nombre pair

B l'événement correspondant à l'apparition d'un nombre premier

$A = \{2,4,6\}$, $B = \{2,3,5\}$.

On observe que le $\complement_\Omega A = \{1,3,5\}$ est l'événement correspondant à l'apparition d'un nombre impair

A et $\complement_\Omega A$ s'excluent mutuellement.

Exemple: On jette une pièce de monnaie jusqu'à ce que l'on obtienne face et l'on compte le nombre de fois que l'on a jeté la pièce. L'ensemble fondamental est donné par:

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, \dots, \infty\}$ ∞ correspond au cas où face n'apparaît jamais. C'est le cas d'un ensemble fondamental infiniment dénombrable.

---

2. Axiomes du calcul des probabilités:

Soit Ω un ensemble fondamental. On dit que P est une fonction de probabilité et que $P(A)$ est la probabilité de l'événement A si l'on a les axiomes suivants:

1. Pour chaque événement $A \subset \Omega$, on a $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si A et B sont des événements qui s'excluent mutuellement alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. Si $A_1, A_2, \dots$ est une suite (infinie) d'événement qui s'excluent mutuellement alors:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k).$$

Conséquences:

- $P(\emptyset)=0$.
- $P(\complement A) = 1 - P(A)$.
- Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$.
- Si A et B sont deux événements donnés, alors

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- Si A, B et C sont trois événements donnés alors:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Ensembles probabilisés finis:

Soit Ω un ensemble fondamental fini ; $\Omega = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$.

Si à chaque élément $a_i \in \Omega$ on attribue un nombre réel p_i vérifiant les propriétés:

(i) $\forall i, \; p_i \geq 0$.

(ii) $p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$.

On dit que l'on a un ensemble probabilisé fini

Si A est un événement quelconque alors sa probabilité $P(A)$ est la somme des probabilités des points de **A**.

$$P(A) = \sum_{a_k \in A} P(\{a_k\})$$

on notera souvent $P(a_k)$ à la place de $P(\{a_k\})$.

Exemple :

Trois étudiants E_1, E_2, E_3 participent à une course.
E_1 a deux fois plus de chances que E_2 de gagner
et E_2 a deux fois plus de chances que E_3 de gagner
quelle est la probabilité que E_2 ou E_3 gagne ?

Notons $P(E_3) = p$ alors $P(E_2) = 2P(E_3) = 2p$.

$P(E_1) = 2P(E_2) = 4p$.

D'un autre côté $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) = 1 \Rightarrow 7p = 1 \Rightarrow p = 1/7$.

$P(E_1) = 4/7$, $P(E_2) = 2/7$, $P(E_3) = 1/7$.

$P(\{E_2, E_3\}) = p(E_2) + p(E_3) = 3/7$.

Ensembles finis équiprobables :

Soit $\Omega = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un espace fondamental fini
si l'on attribue des probabilités égales aux a_i ; càd.
$p(a_1) = p(a_2) = \dots = p(a_n) = p$ on dit que l'on a un espace équiprobable ou uniforme.

Comme $\sum_{i=1}^{n} p(a_i) = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} p = 1 \Rightarrow p = 1/n$.

et dans ce cas si un événement A est formé de k points alors

$$P(A) = k \cdot \frac{1}{n} = \frac{k}{n} = \frac{\text{nombre de cas favorable à la réalisation de } A}{\text{nombre de cas possibles de tous l'ensemble } S}.$$

• On utilisera l'expression "au hasard" pour un espace équiprobable

Exemple: Tirons une carte "au hasard" d'un jeu de 52 cartes

$A = \{$ la carte est un carreau $\}$.

$B = \{$ la carte représente une figure $\}$.

Calculer $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$.

$$P(A) = \frac{\text{nombre de carreaux}}{\text{nombre de carts}} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}.$$

$$P(B) = \frac{\text{nombre de figure}}{\text{nombre de carts}} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

$$P(A \cap B) = \frac{\text{nombre de figures de carreau}}{\text{nombre de carts}} = \frac{3}{52}$$

Ensemble fondamentaux infinis:

Il existe deux types d'ensembles infinis $<$ Ω infiniment dénombrable / Ω infini non dénombrable

$S = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ est appelé infini dénombrable

on obtient un espace probabilisé en attribuant à chaque $a_i \in S$ une probabilité $p(a_i) = p_i$ vérifiant:

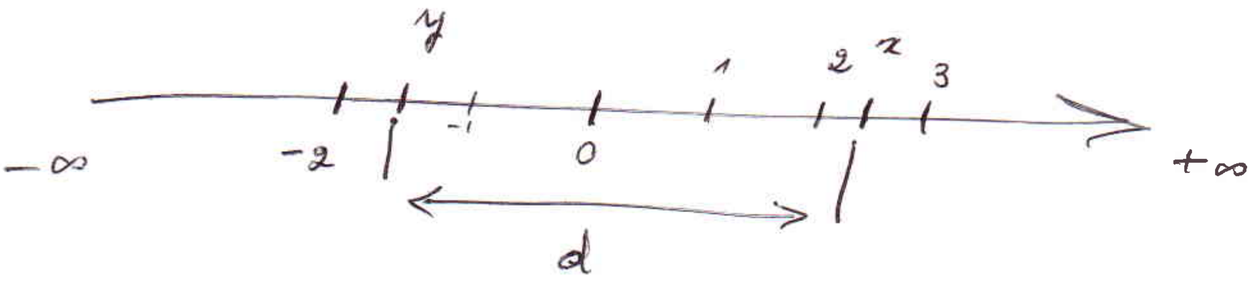
(i) $p_i \geq 0$

(ii) $p_1 + p_2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

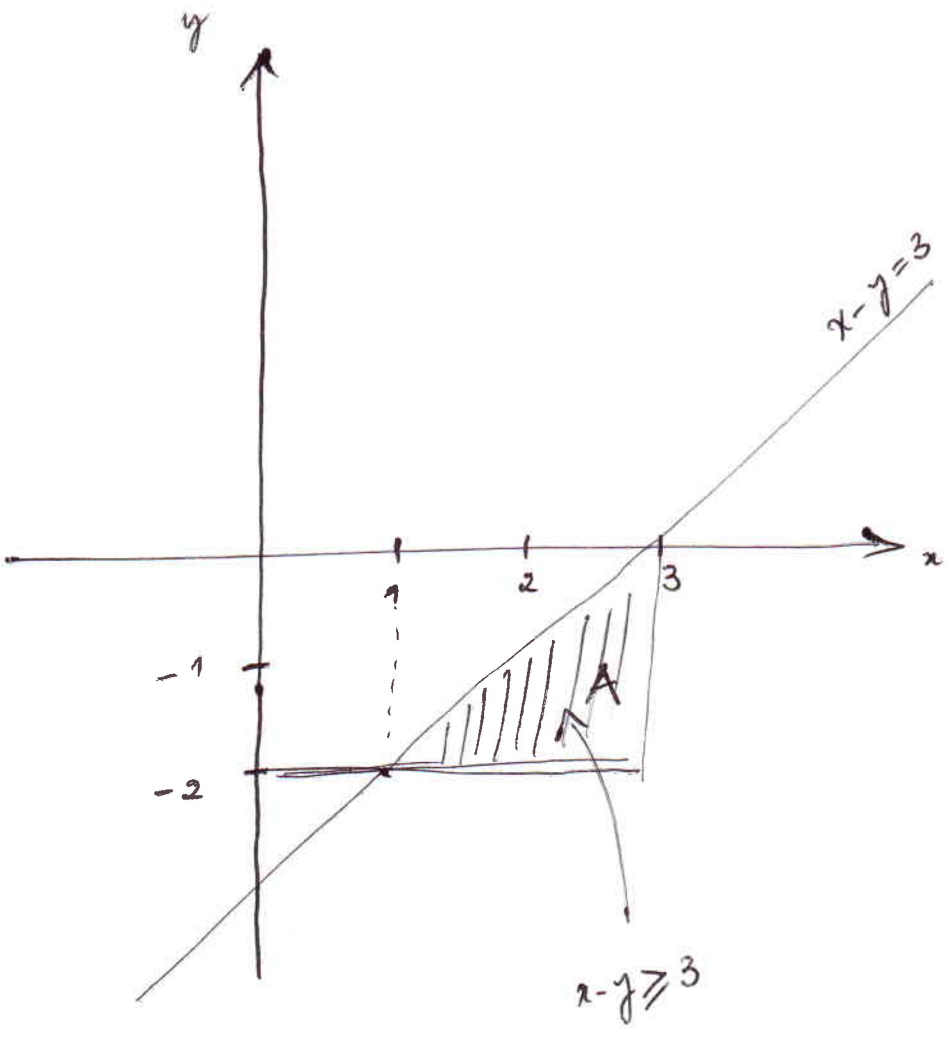
Un ensemble infini non dénombrable peut être illustré par l'exemple suivant:

Exemple: On considère des points au hasard x et y de la droite réelle tels que $-2 \leq y \leq 0$ et $0 \leq x \leq 3$.

Calculer la probabilité p pour que la distance entre x et y soit plus grande que 3.



$d = |x-y| = x-y$, $P(x-y \geq 3)$



$$P(x-y > 3) = \frac{\text{aire de A}}{\text{aire de } \Omega} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Probabilités conditionnelles et indépendance:

Soit Ω un ensemble fondamental, $E \subset \Omega$ un événement quelconque

La probabilité conditionnelle d'un événement A sachant que E est (déjà) réalisé notée $P(A/E)$ est donnée par:

$$\boxed{P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}}$$

Cas particulier: Si Ω est un ensemble équiprobable fini

$$P(A/E) = \frac{\text{nombre d'éléments de } (A \cap E)}{\text{nombre d'élément de } E}$$

Exemple: On jette 2 dé, sachant que la somme est égale à 6

Calculer la probabilité pour que l'un des dés ait donné un 2.

$E = \{\text{la somme est égale à } 6\} = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

$A = \{\text{au moins l'un des deux dés donne un deux}\}$.

$A \cap E = \{(2,4), (4,2)\}$.

$$P(A/E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{2}{5}$$

Remarque: Nous n'avons pas eu besoin de Calculer Ω et A

$\Omega = \{(1,1), (1,2), (1,3) \dots, (2,1), (2,2) \dots, \}$.

$A = \{(1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2), (2,4), (4,2), (2,5), (5,2)$
$(2,6), (6,2)\}$

Théorème de la multiplication :

Soient A et E deux événements donné ; alors.

$$P(E \cap A) = P(E) . P(A/E)$$

et plus généralement, pour des événements quelconques $A_1, A_2, \dots, A_n$.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/(A_1 \cap A_2)) \dots P(A_n/(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1}))$$

Exemple : Un lot contient 12 articles dont 4 sont défectueux. On tire au hasard trois articles du lot, l'un après l'autre (sans remise). Calculer la probabilité p pour que les trois articles tirés ne soient pas défectueux.

A_1 = { le premier article n'est pas défectueux }.

A_2 = { le deuxième article n'est pas défectueux }.

A_3 = { le troisième article n'est pas défectueux }.

On veut calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$

D'après le théorème de multiplication : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) . P(A_2/A_1) . P(A_3/(A_1 \cap A_2))$

$$P(A_1) = \frac{8}{12}$$

$$P(A_2/A_1) = \frac{7}{11}$$

$$P(A_3/(A_1 \cap A_2)) = \frac{6}{10}$$

$$p = \frac{8}{12} \times \frac{7}{11} \times \frac{6}{10}.$$

$$p = \frac{8 \times 7 \times 6}{12 \times 11 \times 10} = \frac{14}{55}$$

Théorème de Bayes :

Soit Ω un ensemble fondamental.

$A_1, A_2, \cdots, A_n$ une partition de Ω

(les A_i s'excluent mutuellement $A_i \cap A_j = \phi$ $\forall i \neq j$

et $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cdots \cup A_n = \Omega$).

alors A_i B est un évènement quelconque alors

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B/A_n)}$$

Remarque : on a aussi la formule :

$$P(B) = P(A_1)P(B/A_1) + P(A_2)P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)P(B/A_n).$$

Définition :

On dit que deux évènements sont indépendants ssi

$$P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

Remarque :

$$P(A\cap B) = P(A).P(B/A)$$

Si A et B sont indépendants $P(A\cap B) = P(A).P(B)$

et on a (formellement) $P(B/A) = P(B)$

donc la réali de B n'est pas influencée par celle de A

A et B sont indépendants

Exemple :

Deux tireurs A et B s'exercent sur une même cible

La probabilité pour que A atteigne la cible est $1/4$

" " " B " " " " $2/5$.

Sachant que A et B tirent indépendament sur la cible quelle est la probabilité pour que celle-ci soit atteinte.

Sol :

$P(A) = 1/4$, $P(B) = 2/5$

On cherche à calculer $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= P(A) + P(B) - P(A) . P(B) \quad \text{(A et B indépendant)}$$

$$= 1/4 + 2/5 - 1/4 . 2/5 = \frac{11}{20} .$$

On dit que trois événements A, B et C sont indépendants si :

① $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$, $P(A \cap C) = P(A) . P(C)$ et $P(B \cap C) = P(B) . P(C)$

et ② $P(A \cap B \cap C) = P(A) . P(B) . P(C)$

Exemple : On jette deux pièces de monnaie, et considère les événements :

$A = \{$ face apparait sur la première pièce $\}$

$B = \{$ face apparait sur la deuxième pièce $\}$.

$C = \{$ face apparait sur une seule des deux pièces $\}$

A, B, et C sont-ils indépendants ?

Solution:

$$\Omega = \{(F F), (F P), (P F), (P P)\}$$

$A = \{(F F), (F P)\} \longrightarrow P(A) = 2/4 = 1/2$

$B = \{(F F), (P F)\} \longrightarrow P(B) = 2/4 = 1/2$

$C = \{(F P), (P F)\} \longrightarrow P(C) = 2/4 = 1/2$

$P(A \cap B) = P(\{(F, F)\}) = 1/4 = P(A).P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(A \cap C) = P(\{(F, P)\}) = 1/4 = P(A).P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

$P(B \cap C) = P(\{(P F)\}) = 1/4 = P(B).P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$

La condition (i) est vérifiée.

$P(A \cap B \cap C) = P(\emptyset) = 0.$

$P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 1/8$ La condition (ii) n'est pas vérifiée

A, B, et C ne sont pas indépendants.

Fiche de TD 1

EXERCICE 1 : (4.11. page 62. Lip).

En première année GI, 25% des étudiants échouent en analyse, 15% échouent en algèbre, et 10% échouent à la fois en algèbre et en analyse. On choisit un étudiant au hasard

1- Si l'étudiant a échoué en algèbre quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en analyse?

2- Si l'étudiant a échoué en analyse quelle est la probabilité pour qu'il ait aussi échoué en algèbre?

3- Quelle est la probabilité pour qu'il ait échoué en analyse ou en algèbre?

EXERCICE 2 : (4.15. page 63 Lip)

3 machins A, B et C produisent respectivement 60%, 30% et 10% des pièces fabriquées dans une usine. Les probabilités de fabriquer une pièces defectueuse par ces machins sont respectivement 2%, 3%, 4%.

On choisit une pièce au hasard et on s'apreçoit qu'elle est défectueuse, calculer la probabilité pour que cette pièce ait été produite par la machine C.

EXERCICE 3 : (4.19 page 64 Lip)

On a trois urnes A, B et C

l'urne A contient 3 billes rouges et 5 billes noires

l'urne B " 2 " " " 1 " "

l'urne C " 2 " " " 3 " "

On prend une urne au hasard et l'on tire une bille de l'urne. Si la bille est tirée rouge quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de A?

Exercice 4 (4.25 page 66 Lip)

Dans un couple, la probabilité pour que l'homme vive encore 10 ans est 1/4, et la probabilité pour que la femme vive encore 10 ans est 1/3. Calculer la probabilité pour que:

1- Tous les deux vivent encore 10 ans
2- l'un deux au moins vive encore 10 ans.
3- Aucun deux ne vive encore 10 ans.
4- Uniquement la femme vive 10 ans.

Exercice 5: (II. 18 page 14 Kh).

Un point est choisi au hasard à l'intérieur d'un cercle. Calculer la probabilité p pour que ce point soit plus prè du centre du cercle que de la circonférence.

Exercice 6. (II.20 page 14 Kh)

Deux amis se donnent rendez-vous dans un lieu donné entre 18 et 19 heure. Ils conviennent que le premier arrivé attend l'autre 10mn.
Trouver la probabilité p pour que ces deux amis se rencontrent.

Exercice 7: (II.22. page 15. Kh).

Un magasin reçoit pour la vente des produits en provenance de 3 usines $\begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}$ avec les parts relatives $u_1 \to 50\%$, $u_2 \to 30\%$, $u_3 \to 20\%$. Le pourcentage des produits defectueux dans la production de ce usine et respectivement: 2%, 3%, et 5%.

Quelle et la probabilité qu'un produit acheté au hasard soit de bonne qualité?

Solutions

Exercice 1

Notons : $A_1 = \{$étudiant échoué en analyse$\}$.
$A_2 = \{$étudiant échoué en algèbre$\}$.

$P(A_1) = 0,25$, $P(A_2) = 0,15$, $P(A_1 \cap A_2) = 0,1$.

- $P(A_2/A_1)$ probabilité que l'étudiant échoue en Algèbre sachant qu'il a déjà échoué en analyse.

$P(A_1/A_2)$ probabilité que l'étudiant échoue en analyse sachant qu'il a déjà échoué en algèbre

1/ $P(A_1/A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \dfrac{0,1}{0,15} = 2/3$

2/ $P(A_2/A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_1)} = \dfrac{0,1}{0,25} = 2/5$.

3/ $P(A_1 \underset{\text{ou}}{\cup} A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0,25 + 0,15 - 0,1 = 0,3 = 3/10$.

Exercice 2 :

On note les événements

$A = \{$la pièce est produite par la machine $A\} \longrightarrow P(A) = 0,6$
$B = \{$ " " " " $B\} \longrightarrow P(B) = 0,3$
$C = \{$ " " " " $C\} \longrightarrow P(C) = 0,1$.

$D = \{$la pièce produite est défectueuse$\}$.

$P(D/A) = 0,02$, $P(D/B) = 0,03$, $P(D/C) = 0,04$

On cherche $P(C/D)$?? on utilise la formule de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C).P(D/C)}{P(A).P(D/A) + P(B).P(D/B) + P(C).P(D/C)} = \frac{0,1 \times 0,04}{0,6 \times 0,02 + 0,3 \times 0,03 + 0,1 \times 0,04}$$

$$= 4/25.$$

Exercice 3 :

$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3$.

Notons $R = \{$ la boule tiré est rouge $\}$.

$P(R/A) = 3/8$, $P(R/B) = 2/3$, $P(R/C) = \frac{2}{5}$.

On cherche $P(A/R)$. On applique la formule de Bayes.

$$P(A/R) = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(C) \cdot P(R/C)}$$

$$= \frac{1/3 \cdot 3/8}{1/3 \cdot 3/8 + 1/3 \cdot 2/3 + 1/3 \cdot 2/5} = \frac{45}{173}.$$

Exercice 4 On considère les événements

$A = \{$ l'homme vit encore 10 ans $\}$.

$B = \{$ la femme vit encore 10 ans $\}$.

$P(A) = 1/4$, $P(B) = 1/3$

1/ les deux vivent encore 10 ans : $A \cap B$.

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 1/3 \cdot 1/4 = 1/12$ (A et B sont indépendants)

2/ l'un des deux au moins vive 10 ans : $A \cup B$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 1/4 + 1/3 - 1/12 = 1/2$.

3/ aucun des deux ne vive encore 10 ans : $CA \cap CB$ $(\bar{A} \cap \bar{B})$.

Comme A et B sont indépendants $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants aussi

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = (1 - P(A)) (1 - P(B)) = (1 - 1/4)(1 - 1/3) = 1/2$.

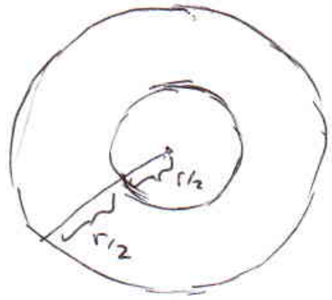
4/ Uniquement la femme vive 10 ans $P(\bar{A} \cap B)$.

$\bar{A}$ et B sont indépendants (à prouver)

$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = (1 - P(A))(P(B)) = (1 - 1/4) \cdot 1/3 = 1/4$.

Exercice 5 :

Notons C_r le cercle de rayon r $C(0,r)$, l'ensemble de points plus près du centre que de la circonférence est le centre $C(0, r/2)$.

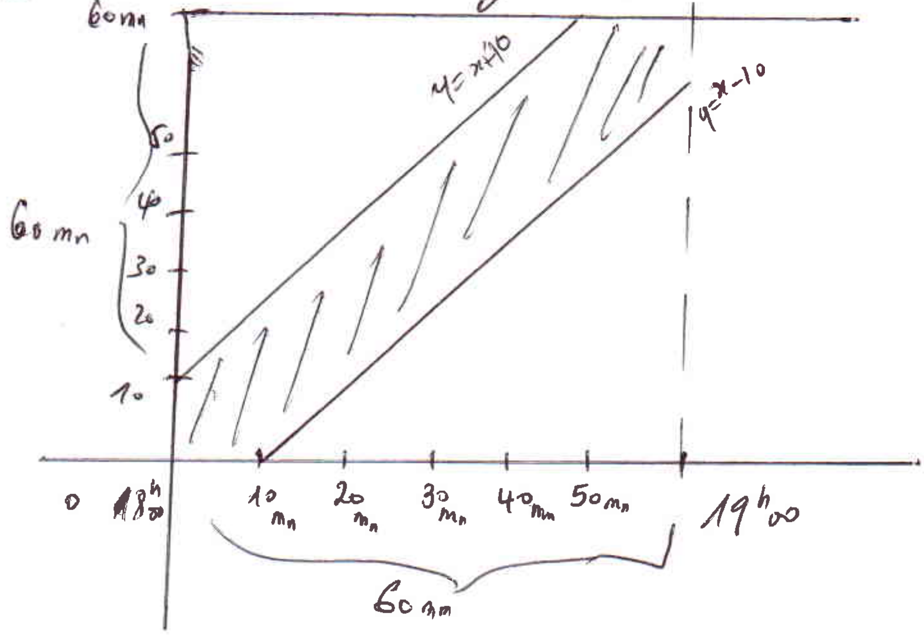


Ainsi la probabilité cherchée $P = \dfrac{\text{aire } C(0, r/2)}{\text{aire } C(0,r)} = \dfrac{\pi (r/2)^2}{\pi r^2} = 1/4$

Exercice 6

Entre 18^h00 et 19^h00 donc sur 60min notons x, y les temps d'arrivée des deux amis, pour qu'ils se rencontrent il faudrait que

$|x-y| \leq 10$ donc $-10 \leq y - x \leq +10 \Leftrightarrow x-10 \leq y \leq x+10$



La probabilité cherchée correspond à l'aire de la surface hachurée sur l'aire de la surface du carré.

aire du carré : $60 \times 60 = 60^2 = 3600$

aire hachurée : $60^2 - \dfrac{2 \times 50^2}{2} = 3600 - 2500 = 1100$

$P = \dfrac{11\cancel{00}}{36\cancel{00}} = \dfrac{11}{36}.$