Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté de Technologie
Spécialité Génie Industriel

Année 2021-2022
1ère Année
Outils Mathématiques

Contrôle Continu

Exercice1 : (07 pts)

1. Donner le développement de Taylor-MacLaurin à l'ordre n=5 des fonctions

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

2. Calculer la limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{f_1(x) - \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

Exercice2 : (06 pts)

Donner l'expression de la dérivée nième de la fonction suivante : $f(x) = ln(1 + 3x)$

Exercice3 : (07 pts)

1. Sachant que $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ calculer $\left(arctg\left(\frac{1}{x}\right)\right)'$

2. Donner la valeur de

$$arctgx + arctg\left(\frac{1}{x}\right)$$

Mars 2022

Contrôle continu

Outils Mathématiques

Corrigé type.

Exercice 1 :

1.
$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$ [cette fonction est appelée cosinus hyperbolique et notée $ch\,x$].

$$f_1(0) = \frac{e^0 + e^0}{2} = 1.$$

$$f_1'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f_2(x) \Rightarrow f_1'(0) = 0.$$

$$f_1''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = f_1(x) \Rightarrow f_1''(0) = 1.$$

$$f_1'''(0) = 0, \quad f^{(4)}(0) = 1, \quad f^{(5)}(0) = 0.$$

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \frac{x^4}{4!} f^{(4)}(0) + \frac{x^5}{5!} f^{(5)}(0) + x^5 \varepsilon(x).$$

$$f_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^5 \varepsilon_1(x).$$ 2pts

Un calcul similaire à celui fait pour f_1 peut facilement donner :

$$f_2(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5 \varepsilon_2(x).$$ 2pts

Remarques . $f_2(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ [cette fonction est appelée sinus hyperbolique et notée $sh\,x$]

. On peut observer que $ch'(x) = sh(x)$ et que $sh'(x) = ch(x)$ ce qui fait que l'on peut déduire le développement de f_1 à partir de celui de f_2 et vice versa.

2. $$\lim_{x\to 0} \frac{f_1(x)-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+x^5\varepsilon_1(x)\right)-\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}{x^4}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^4}{4!}+x^5\varepsilon_1(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{4!}+x\,\varepsilon_1(x)\right) = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}.$$ 3pts

Exercice 2: $f(x)=\ln(1+3x)$ $\qquad D_f = \left]-\frac{1}{3}, +\infty\right[$.

Sur D_f on a : $f'(x)=\dfrac{3}{1+3x} = 3(1+3x)^{-1}$.

$$f''(x) = 3\times 3\times(-1)\cdot(1+3x)^{-2}$$

$$f'''(x) = 3\times3\times3\times(-1)(-2)(1+3x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = 3\times3\times3\times3\times(-1)(-2)(-3)(1+3x)^{-4}.$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = 3^n(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+3x)^{-n}$$ 3pts

formule que l'on doit montrer par récurrence. En effet :

Pour $n=1$ $\quad f'(x)=3(1+3x)^{-1} = 3^1(-1)^0\,0!\,(1+3x)^{-1}$ (formule vérifiée)

On suppose à présent que : $f^{(n)}(x) = 3^n(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+3x)^{-n}$ (HR)

Il faut montrer que : $f^{(n+1)}(x) = 3^{n+1}(-1)^n\,n!\,(1+3x)^{-(n+1)}$.

$$f^{(n+1)}(x) = \left[f^{(n)}(x)\right]' = \left[3^n(-1)^{n-1}(n-1)!\,(1+3x)^{-n}\right]' = 3^n(-1)^{n-1}(n-1)!\,(-n)\,3\,(1+3x)^{-n-1}$$

$$= 3^{n+1}(-1)^n\,n!\,(1+3x)^{-(n+1)}$$ cqfd. 3pts

Exercice 3 :

1. $\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = -\frac{1}{x^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}$

[formule de dérivation de la composée de deux fonctions $\left[g(f(x))\right]' = f'(x)\cdot g'(f(x))$ avec $g = \operatorname{arctg} x$ et $f = \frac{1}{x}$]

$= \frac{-1}{1+x^2}$. 1pt

Remarque importante : $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et la formule $\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = \frac{-1}{1+x^2}$ est donc valable pour $x \in \mathbb{R}^*$.

---

2. D'après la première question, on sait que :

$$\left[\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right]' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{1+x^2} = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*.$$

Donc sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = c_1$

et sur l'intervalle $]0, +\infty[$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = c_2$

c_1 et c_2 ne sont pas nécessairement égales.

pour trouver c_1 prenons par exemple $x = -1$

$$\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{-1}\right) = \operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Pour trouver c_2 prenons par exemple $x = +1$.

$$\operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{1}\right) = \operatorname{arctg}(1) + \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $x > 0$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$ 3pts

Pour $x < 0$ $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$. 3pts