Université de Tlemcen. **Année Universitaire : 2016/2017.**
Département de Génie Electrique et Electronique. **Analyse Mathématique.**
1ère Année Génie Industriel.

Examen Final

Exercice 1 : (6 pts)

Calculer, si elles existent, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2\cos(x)}{x^2+\sin(x^2)}, \qquad \lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \lim_{x\to+\infty} (x\ln(x+5) - x\ln(x-7)).$$

Exercice-2 : (5 pts)

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{e^{\alpha x}-1}{x} \qquad \alpha \in I\!R^*$$

1. La fonction f est elle prolengeable par continuité aux points où elle n'est pas définie ? Si oui, on précisera alors ce prolongement que l'on notera par F.

2. Etudier la dérivabilité de la fonction F sur $I\!R$.

Exercice-3 : (9 pts)

On considère la suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels positifs définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2+\ln(x)$ admet un point fixe α dans $[3,4]$.

2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n \in [3,\alpha]$.

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante.

4. En déduire que cette suite est convergente, et déterminer sa limite.

Correction

Exercice 1 : (6 pts)

1.
$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{x^2+\sin(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{\frac{x^2+\sin(x^2)}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1+\frac{\sin(x^2)}{x^2}}=\frac{1}{2},\qquad \text{(02 points)}$$

car $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x^2)}{x^2}=1$

2. $\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$, on pose $y=\frac{1}{x}$ alors

$$\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{y\to+\infty}(1+\frac{3}{y})^y=\mathrm{e}^3 \qquad \text{(02 points)}$$

3.
$$\lim_{x\to+\infty}(x\ln(x+5)-x\ln(x-7))$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x(\ln(x+5)-\ln(x-7))=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{x+5}{x-7}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+5}{x-7}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x(1+\frac{5}{x})}{x(1-\frac{7}{x})}\right)^x=\ln\left(\frac{\mathrm{e}^5}{\mathrm{e}^{-7}}\right)=\ln(\mathrm{e}^{12})=12. \qquad \text{(02 points)}$$

Exercice-2 : (5 pts) On considère la fonction suivante

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}{x} \qquad \alpha\in I\!R^*$$

1. La fonction f est elle prolengeable par continuité aux points où elle n'est pas définie : $D_f=I\!R^*$, Etude de prolengement par continuité de f en 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=g'(0) \text{ où } g(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$$

La fonction g est dérivable en 0, alors $g'(x)=\alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\Rightarrow g'(0)=\alpha$.
Alors
$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}{x}=\alpha. \qquad \text{(02 points)}$$

On définit le prolengement de f par

$$F(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}{x} & \text{si } x\neq 0\\ \alpha & \text{si } x=0,\end{cases} \qquad \text{(01 point)}$$

2. Etude de la dérivabilité de la fonction F sur $I\!R$:
Il est clair que f est dérivable sur $I\!R^*$, étude de la dérivabilité de la fonction F en 0

- $\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1}{x}-\alpha}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{\alpha x}-1-\alpha x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{H'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{H''(x)}{2}=\frac{\alpha^2}{2}$ (02 points)
où la fonction H est 2− fois dérivable en 0, alors F est dérivable en 0 et $F'(0)=\frac{\alpha^2}{2}$.
On peut utiliser le développement de taylor au voisinage de 0 de e^x, on obtient :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\alpha x+\frac{(\alpha x)^2}{2}+x^3\varepsilon(x)-1-\alpha x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{a^2}{2}+x\varepsilon(x)=\frac{a^2}{2}$$

Exercice-3 : (9 pts) On considère la suite $\{u_n\}_{n\in N}$ de nombres réels positifs définie par la relation de récurrence :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2 + \ln(u_n) \end{cases}$$

1. Soit $\alpha \in [3,4]$ un point fixe de $f(x) = 2+\ln(x)$ alors $f(\alpha) = \alpha$ donc $2+\ln(\alpha) = \alpha$, on considère la fonction g définie par $g(x) = 2+\ln(x) - x$,
   pour montrer que f admet un point fixe il suffit de démontrer que l'equation$g(x) = 0$ admet une sotution,
   La fonction g est une fonction continue sur $[3,4]$, et

   $$\begin{cases} g(3) = 2+\ln(3) - 3 = 0.09 \\ g(4) = 2+\ln(4) - 4 = -0.61 \end{cases} \Longrightarrow g(3)g(4) < 0,$$

   alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe une solution $\alpha \in [3,4]$ telle que $g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) = 2+\ln(\alpha) = \alpha$ alors f admet un point fixe $\alpha \in [3,4]$. (03 points)

2. Raisonnement par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3,\alpha]$ (P_n). (02 points)
   - Vérification : $n = 0$, $3 \le u_0 = 3 \le \alpha$ car $\alpha \in [3,4]$.
   - Hypothèse de récurrence :(P_n)
     Résultat :$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \in [3,\alpha]$ (P_{n+1}).
     On a
     $$3 \le u_n \le \alpha \Rightarrow \ln(3) \le \ln(u_n) \le \ln(\alpha) \Rightarrow 3 < 2+\ln(3) \le u_{n+1} = 2+\ln(u_n) \le \ln(\alpha)+2 = \alpha$$
     car α est un point fixe.
   - On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [3,\alpha]$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (u_n) est une suite croissante. (02 points)
   Raisonnement par récurrence que (u_n) est une suite croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \ge 0$ (P_n).
   - Vérification : $n = 0$, $u_1 - u_0 = 2+\ln(3) - 3 = \ln(3) - 1 \ge 0$.
   - Hypothèse de récurrence :(P_n)
     Résultat :$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - u_{n+1} \ge 0$ (P_{n+1}).
     On a
     $$u_{n+1} \ge u_n \Longrightarrow \ln(u_{n+1}) \ge \ln(u_n) \Longrightarrow 2+\ln(u_{n+1}) \ge 2+\ln(u_n) \Longleftrightarrow u_{n+2} - u_{n+1} \ge 0.$$
   - On déduit que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \ge 0$ alors (u_n) est une suite croissante.

4. - Puisque (u_n) est une suite croissante et majorée par α alors on en déduit que (u_n) est convergente. (01 point)
   - (u_n) est une suite convergente alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = l \Rightarrow l = 2+\ln(l) = f(l)$; donc l est un point fixe de f, et comme $u_n \in [3,\alpha] \Longrightarrow l \in [3,\alpha]$ et par suite $l = \alpha$. (01 point)