Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen | *Année 2010-2011*
Faculté des Sciences | *1ère Année MI*
Département de Mathématiques | *Algèbre II*

Matrices

***Exercice 1 :** Soient A, B et C les matrices suivantes*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. *Calculer $B + C$, $B - C$, $B + 2C$, $2B - 3C$.*
2. *Calculer AB, AC, A^2, A^3.*
3. *Déterminer ${}^tA$, ${}^tB$, ${}^tC$, ${}^t(AB)$*
4. *Vérifier que la matrice A est inversible et calculer A^{-1}.*

Exercice 2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Calculer $M^3 - 2M^2 + 2M$.*
2. *Déduire de ce qui précède que la matrice M est inversible ; puis donner M^{-1}.*
3. *Retrouver M^{-1} par utilisation de la comatrice de M.*

Exercice 3 :

I. *Soit la matrice :* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. *Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.*
2. *En déduire la solution du système :*

$$\begin{cases} -x + y - z = \alpha_1 \\ x + y + z = \alpha_2 \\ x - 2y + 4z = \alpha_3 \end{cases}$$

Où α_1, α_2 et α_3 sont trois réels donnés.

II. *Soit la matrice :* $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$

où a, b et c sont trois réels non nuls. Dire pour quelle(s) valeur(s) de a, b et c la matrice B est inversible.

***Exercice 4:** Supplémentaire (Sera traité en cours si le temps le permet)*

Soit l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = (-x + y - z, -x + y + z, -2x + 2y)$$

1. *Soit $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, donner $M_1 = M(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1)$.*
2. *Soit $\mathcal{B}_2$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie comme suit : $\mathcal{B}_2 = \{(1,1,1), (2,0,1), (0,-1,1)\}$.*
   Par deux méthodes, calculer $M_2 = M(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$.
3. *Soit $\mathcal{B}_3$ la base de $\mathbb{R}^3$ définie comme suit : $\mathcal{B}_3 = \{(1,1,0), (0,1,1), (1,0,1)\}$.*
   Par deux méthodes, calculer $M_3 = M(f, \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3)$.
4. *Sans les calculer, Montrer que $det(M_1) = det(M_3)$*

<u>*Indications -réponses*</u>

<u>***Exercice1:***</u>

4. $\boldsymbol{detA = 2 \neq 0}$ ***donc A est une matrice inversible*** $A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^t(comA) \quad A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

<u>***Exercice 2 :***</u>

1 . $M^3 - 2M^2 + 2M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I$

2 . On remarque -de ce qui précède - que $\frac{1}{2}M\left(M^2 - 2M + 2I\right) = \frac{1}{2}\left(M^2 - 2M + 2I\right)M = I$ ***donc M est inversible***

et $M^{-1} = \frac{1}{2}\left(M^2 - 2M + 2I\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

3. $M^{-1} = \frac{1}{detM}\ {}^t(comM) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$

<u>***Exercice 3 :***</u>

1 . $detA = -6 \neq 0$ ***donc A est une matrice inversible*** $A^{-1} = \frac{1}{detA}\ {}^t(comA) \quad A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

2 . $\begin{cases} -x + y - z = \alpha_1 \\ x + y + z = \alpha_2 \\ x - 2y + 4z = \alpha_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + 4z = \alpha_3 \\ x + y + z = \alpha_2 \\ x - y + z = -\alpha_1 \end{cases} \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_2 \\ -\alpha_1 \end{pmatrix}$

3 . $B = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}$ ***donc***

$$detB = \left(bc^2 - cb^2\right) - a\left(c^2 - b^2\right) + a^2(c - b) = (c - b)(b - a)(c - a)$$

Donc B est inversible ssi $c \neq b$ ***et*** $b \neq a$ ***et*** $c \neq a$