Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen | *Année 2010-2011*
Faculté des Sciences | *1ère Année MI*
Département de Mathématiques | *Algèbre II*

Applications linéaires

***Exercice 1 :** Soit*

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z})$$

1. ***Vérifier que f est une application linéaire.***
2. ***Déterminer kerf le noyau de f, puis donner une base de kerf et en déduire dim(kerf).***
3. ***f es- elle injective ?***
4. ***Donner dim(Imf) ; puis donner une base de Imf.***
5. ***f est-elle surjective ?***

***Exercice 2 :** Soit l'application linéaire suivante :*

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) \mapsto \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$$

1. ***Déterminer kerf le noyau de f et en déduire dim(kerf).***
2. ***f est-elle injective ? f est elle-surjective ? f est-elle bijective ?***
3. ***Donner dim(Imf) ; puis donner une base de Imf.***

Exercice 3 :

1. ***Vérifier que** $\{(\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{1})\}$ **est une base** $\mathbb{R}^2$.*
2. ***Soit f :** $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$**, une application linéaire telle que f**$(\mathbf{1}, \mathbf{1}) = (\mathbf{3}, \mathbf{0})$ **et** $\boldsymbol{f}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = (\mathbf{5}, \mathbf{1})$**, donner alors l'expression de f.***

***Exercice 4:** : Soit*

$$\boldsymbol{f}: \mathbb{R}[\boldsymbol{X}] \to \mathbb{R}[\boldsymbol{X}]$$
$$\boldsymbol{P} \mapsto \boldsymbol{f}\big(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})\big) = \boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X})$$

***Où** $\boldsymbol{P}'(\boldsymbol{X})$ **est le polynôme dérivé de** $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X})$.*

1. ***Vérifier que f est une application linéaire.***
2. ***f est-elle injective ? surjective ?***
3. ***En déduire que la dimension de** $\mathbb{R}[X]$ **ne peut pas être finie.***

***Exercice 5:** (Supplémentaire)*

Soient E, F et G trois** $\mathbb{R}$ **−espaces vectoriels, f :** $\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{F}$ **et** $\boldsymbol{g}: \boldsymbol{F} \to \boldsymbol{G}$**.Monter ce qui suit

1. $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}): \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{G}$ ***; est une application linéaire.***
2. $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{kerg})$ ***.***
3. $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}) = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{Imf})$ ***.***
4. $\boldsymbol{kerf} \subset \boldsymbol{ker}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})$***.***
5. $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}) \subset \boldsymbol{Img}$ ***.***