Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
1ère Année MI
Algèbre II

Espaces Vectoriels

Exercice 0 :

Vérifier que** $(1,1)$ et $(2,3)$ **engendrent** $\mathbb{R}^2$ **. Conclure !

Vérifier que** $\{(1,2,3),(0,1,-1),(2,0,1)\}$ **est une famille libre dans** $\mathbb{R}^3$. **Conclure !

Exercice 1 :** **Soient les ensembles suivants :

$$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y+z=0\} \quad et \quad E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x-y=x+z=0\}$$

1. ***Montrer que** E_1 **et** E_2 **sont des sous espaces vectoriels de** $\mathbb{R}^3$ **.***
2. ***Donner une base de** E_1 **et une base de** E_2 **; et en déduire** $dim\, E_1$ **et** $dim\, E_2$*
3. ***Montrer –par deux méthodes- que** $\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2$ **.***

Exercice 2:** **Soient les ensembles suivants :

$$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x=y=z\} \quad et \quad E_2=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x=0\}$$

1. ***Montrer que** E_1 **et** E_2 **sont des sous espaces vectoriels de** $\mathbb{R}^3$ **.***
2. ***Montrer –par deux méthodes- que** $\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2$ **.***

Exercice 3 :** **Parmi les ensembles F dire lesquels sont des sous espaces vectoriels de E dans chaque cas :

1- ***E=** $\mathbb{R}^3$ **; F=**$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y+3z=0\}$*
2- ***E=** $\mathbb{R}^2$ **; F=**$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x+3y=3\}$*
3- ***E=** $\mathbb{R}^2$ **; F=**$\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2=4\}$*
4- ***E=** $\mathbb{R}[X]$ **; F=**$\{P\in\mathbb{R}[X]; degP=4\}$*
5- ***E=** $\mathbb{R}[X]$ **; F=**$\{P\in\mathbb{R}[X]; degP\leq 4\}$*
6- ***E=**$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; application\}$**; F=**$\{f\in E; paire\}$*
7- ***E=**$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; application\}$**; F=**$\{f\in E; f(1)=0\}$*
8- ***E=**$\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}; application\}$**; F=**$\{f\in E; f(0)=1\}$*

Exercice 4 :**Soient* $E=\{P\in\mathbb{R}[X]; degP\leq 4\}$; $E_1=\{P\in E; P(-X)=P(X)\}$ ***et $E_2=\{P\in E; P(-X)=-P(X)\}$

1. ***Montrer que** E_1 **et** E_2 **sont des sous espaces vectoriels de .***
2. ***Montrer –par deux méthodes- que** $E=E_1\oplus E_2$ **.***

***Exercice 5 :** **Soit** E **le** $\mathbb{R}$ **-espace vectoriel des suites réelles convergentes. Montrer que l'ensemble des suites constantes et l'ensemble des suites convergeant vers 0 sont deux sous espaces supplémentaires dans** E.*

Exercice 6 :** **(supplémentaire) Soient les ensembles suivants :

$$E_1=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x+y-3z=0\} \quad et \quad E_2=\{(x,\alpha x,x)\in\mathbb{R}^3; x\in\mathbb{R}\}$$ ***où** α **est un paramètre réel.***

1. ***Montrer que** E_1 **et** E_2 **sont des sous espaces vectoriels de** $\mathbb{R}^3$ **.***
2. ***Donner une base de** E_1 **et une base de** E_2 **; et en déduire** $dim\, E_1$ **et** $dim\, E_2$*
3. ***Pour quelle(s) valeur(s) du paramètre** α **a-t-on :** $\mathbb{R}^3=E_1\oplus E_2$ **?***

***Exercice 7 :** **(supplémentaire) Soit** $F=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+2y^2+z^2+2y(x+z)=0\}$*

F ainsi défini est-il un sous espace vectoriel de** $\mathbb{R}^3$ **?

Si oui donner sa dimension.

***Exercice 8 (supplémentaire) :** **On note** $E=C^1([0,1];\mathbb{R})$ **le** $\mathbb{R}$ **-espace vectoriel des applications de classe** C^1 **sur** $[0,1]$ **à valeurs dans** $\mathbb{R}$**. On note** $E_1=\left\{f\in E;\ \int_0^1 f(x)\,dx=0\ et\ f(0)=f'(1)=0\right\}$*

et** $E_2=\{f\in E; f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \text{ où } a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\}$ **.

***Montrer que** E_1 **et** E_2 **sont des sous espaces vectoriels supplémentaires de** E.*