Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
1ère Année MI
Algèbre I

Structures algébriques

***Exercice 1** : Sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ on définit la loi $*$ comme suit*

$$x*y=x+y+xy$$

1. *Vérifier que $*$ est une l.c.i (loi de composition interne).*
2. *Montrer que $(\mathbb{R}-\{-1\},\ *)$ est un groupe commutatif.*
3. *Résoudre l'équation : $2*3*x*5=5*3$*

***Exercice 2** :*

1. *Rappeler 'brièvement' pourquoi $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{C}^*,.)$ sont des groupes commutatifs.*
2. *Vérifier que l'application $f:(\mathbb{R},+)\longrightarrow(\mathbb{C}^*,.)$ définie par $f(x)=e^{ix}$ est un homomorphisme de groupes.*

***Exercice 3**: Soit $(G,\ *)$ un groupe, $H_1,\ H_2$ deux sous groupes de G.*

1. *Montrer que $H_1\cap\ H_2$ est aussi un sous groupe de G.*
2. *Donner un exemple où $H_1\ \cup\ H_2$ n'est pas un sous groupe de G.*
3. *On note $C=\{x\in G;\ \forall y\in G\ x*y=y*x\}$ le centre ou centralisateur de G. Montrer que C est un sous groupe de G.*

***Exercice 4**: Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]=\{a+b\sqrt{2};a,b\in\mathbb{Z}\}$ est un anneau*

et que l'ensemble $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]=\{p+q\sqrt{2};p,q\in\mathbb{Q}\}$ est un corps .

***Exercice 5**: On munit $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ de la loi $*$ définie comme suit :*

$$x*y=xy-2(x+y)+6$$

1. *Montrer que $(\mathbb{R}\setminus\{2\},*)$ est un groupe commutatif.*
2. *Montrer que l'application $f:(\mathbb{R}\setminus\{2\},*)\longrightarrow(\mathbb{R}^*,.)$ telle que $f(x)=x-2$; est un homomorphisme de groupes.*
3. *On pose : $P_n=\underbrace{x*x*x\ldots*x}_{n\ fois}$ pour $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $n\in\mathbb{N},n\geq 2$.*

   Exprimer P_n en fonction de x et de n.

***Exercice 6** : (supplémentaire)*

Soit E un ensemble non vide. Montrer que $(\mathcal{P}(E),\Delta,\cap)$ est un anneau ; $\mathcal{P}(E)$ étant l'ensemble des parties de E.

***Exercice 7** : (supplémentaire)*

1. *Déterminer tous les sous groupes de $(\mathbb{Z},+)$.*
2. *Déterminer tous les sous anneaux de $(\mathbb{Z},+,.)$.*

***Exercice 8**: (supplémentaire) Soit G l'ensemble constitué des six applications de $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$ dans*

lui-même suivantes : $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\frac{1}{1-x}$ $f_3(x)=\frac{x}{x-1}$ $f_4(x)=\frac{1}{x}$ $f_5(x)=1-x$ $f_6(x)=\frac{x-1}{x}$

Montrer qu'il s'agit d'un groupe pour la composition des applications (écrire sa table).