Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
1ère Année MI
Algèbre I

Relations binaires

***Exercice 1** : Soit E une ensemble donné et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Soient x et y deux éléments de E.*
Montrer que : $x\mathcal{R}y \Rightarrow \dot{x} = \dot{y}$

***Exercice 2 :** On définit dans $\mathbb{Z}$ la relation $\mathcal{R}$ par :* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow 5 \,/\, (x-y)$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{Z} \,/\, \mathcal{R}$.*

***Exercice 3** : On définit dans $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{S}$ par :* $(x,y)\mathcal{S}(x',y') \Leftrightarrow x \le x' \, et \; y \le y'$

1. *Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre, et dire si l'ordre est total.*
2. *Soit $A = \{(1,2),(3,0)\}$ donner un majorant un minorant la borne inférieure et la borne supérieure de A.*

***Exercice 4** : On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par :* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{x^2} = y^2 - \frac{1}{y^2}$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer $\dot{a}$; la classe d'équivalence du réel non nul a .*

***Exercice 5** : On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par :* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \; divise \; y$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, et dire si l'ordre est total.*
2. *Soit $A = \{2,3,5\}$ donner un majorant un minorant la borne inférieure et la borne supérieure de A*

***Exercice 6** : On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{R}$ par :* $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x^3 - x = y^3 - y$

1. *Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Déterminer $\dot{a}$; la classe d'équivalence du réel a .*

***Exercice 7** : On définit dans $\mathbb{N}^*$ la relation $\mathcal{S}$ par :* $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N};\; x^n = y$

1. *Vérifier que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre, et dire si l'ordre est total.*
2. *Soit $A = \{1,3,6\}$ donner un majorant un minorant la borne inférieure et la borne supérieure de A.*

***Exercice 8** : (Supplémentaire) On définit dans $\mathbb{R}^*$ la relation $\mathcal{R}$ par :* $xy > 0$

$\mathcal{R}$ est-elle une relation d'équivalence ?

On définit dans $\mathbb{R}$ la relation $\mathcal{S}$ par : $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow xy \ge 0$

$\mathcal{S}$ est-elle une relation d'équivalence ?

***Exercice 9**: (Supplémentaire Examen 2009-2010)*

On définit sur $\mathbb{R}^2$ la relation $\mathcal{S}$ comme suit :

$$(x,y)\mathcal{S}(x',y') \Leftrightarrow |x'-x| \le y'-y$$

1. *Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'ordre.*
2. *L'ordre $\mathcal{S}$ est-il total ou partiel ?*
3. *Soit $A = \{(1,2)\}$ représenter graphiquement l'ensemble des majorants de A relativement à l'ordre $\mathcal{S}$.*