Université Abou Bekr Belkaid Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques

Année 2010-2011
1ère Année MI
Algèbre I

Fiche de TD 2 : Ensembles-Applications

Exercice 1 ***: Soient A et B deux sous ensembles d'un ensemble E.***

Etablir que :

$$A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B = A \setminus B$$

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Exercice 2 : ***Soit E un ensemble donné, montrer ce qui suit***

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$

Exercice 3 : ***Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2 - 1$***

1. ***f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?***
2. ***Soit à présent $g: [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ telle que $g(x) = x^2 - 1$; montrer que g est bijective et donner l'expression de sa fonction inverse.***

Exercice 4 ***: On considère quatre ensembles A, B, C et D et des applications $f: A \to B$, $g: B \to C$, $h: C \to D$.***

Montrer que :

1. $(g \circ f)$ *injective* $\Rightarrow f$ *injective*
2. $(g \circ f)$ *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective*
3. $\big((g \circ f) \text{ et } (h \circ g) \text{ bijectives}\big) \Rightarrow (f, g \text{ et } h \text{ sont bijectives})$

Exercice 5 : ***Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$***

1. ***f ainsi définie est-elle injective ? surjective ?***
2. ***Donner $f(\mathbb{R})$; l'image directe de $\mathbb{R}$ par l'application f.***
3. ***En déduire que l'application $g: [-1, 1] \to [-1, 1]$ telle que $g(x) = f(x)$ est une application bijective.***

Exercice 6 : ***Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = e^{ix}$***

1. ***f ainsi définie est-elle bijective ?***
2. ***Trouver de « bons » sous ensembles de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{C}$ de telle sorte que l'application qui à x associe e^{ix} soit bijective.***

Exercice 7 ***: (Supplémentaire) Soit $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$. L'application f ainsi définie est elle bijective ?***

Exercice 8 ***: (Supplémentaire) $f: E \to F$ une application et $\subset E$. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$ et qu'il y a égalité si f est injective.***

Exercice 9 ***: (Supplémentaire, Examen 2009-2010.) Soient a, b, c et d des réels non nuls donnés, et soit g définie comme suit :***

$$g: \mathbb{R} - \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{y_0\}$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

1. ***Comment doit- on choisir le réel x_0 pour que g soit une application ?***
2. ***Comment doit-on choisir a, b, c et d pour que g soit une application injective ?***
3. ***Comment doit- on choisir a, b, c, d et le réel y_0 pour que g soit une application surjective ?***
4. ***Comment doit-on choisir a, b, c, d, x_0 et y_0 pour que g soit une application bijective ?***