

Fiche de TD 1 : Arithmétique dans  $\mathbb{Z}$

**Exercice 1 :** Montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$

$$5|(12^n - 7^n) \quad \text{et} \quad 6 \mid (3(3^{2n} + 1))$$

**Exercice 2 :** En utilisant les congruences, montrer que

$$n \text{ est impair} \Rightarrow 8|(7^n + 1)$$

Puis donner le reste de la division de  $(7^n + 1)$  par 8 lorsque  $n$  est pair.

**Exercice 3 :** Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est toujours divisible par 9

i.e. il faut montrer ce qui suit  $(n^3 + (n + 1)^3 + (n + 2)^3) \equiv 0[9]$

**Exercice 4 :** En utilisant les congruences, montrer qu'un entier est divisible par 3 (resp par 9) ssi la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp par 9).

**Exercice 5 :** Calculer ce qui suit

$$\text{pgcd}(955,183), \text{ppcm}(955,183), \text{pgcd}(126, 230), \text{ppcm}(126, 230)$$

**Exercice 6 :** Résoudre le système

$$\begin{cases} x \wedge y = 18 \\ x \vee y = 540 \end{cases} \quad \text{où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers naturels}$$

On rappelle que  $x \wedge y = \text{pgcd}(x, y)$  et que  $x \vee y = \text{ppcm}(x, y)$

**Exercice 7 :** Résoudre les équations diophantiennes suivantes

$$7x - 9y = 6; \quad 955x + 183y = 1; \quad 123x + 67y = 10$$

**Exercice 8 :** A quelle condition nécessaire et suffisante le système

$$\begin{cases} x \equiv a[m] \\ x \equiv b[n] \end{cases}$$

Admet-il une solution ?

**Exercice 9 :**(Supplémentaire) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  ce qui suit

$$3x \equiv 4[10]$$

$$3x^2 + 4x + 1 \equiv 0[5]$$

**Exercice 10 :** (Supplémentaire) Examen 2009-2010

1. Résoudre l'équation diophantienne suivante :

$$37x + 27y = 1000$$

2. Préciser  $x$  et  $y$  sachant que  $x$  représente le nombre d'étudiants inscrits en 2<sup>ème</sup> année Licence Mathématiques et  $y$  le nombre d'étudiants inscrits en 3<sup>ème</sup> année Licence Mathématiques.